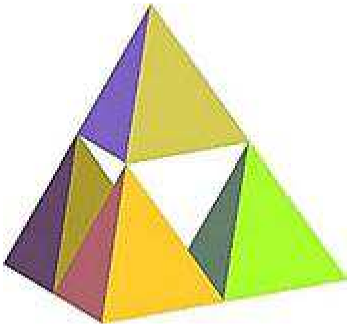
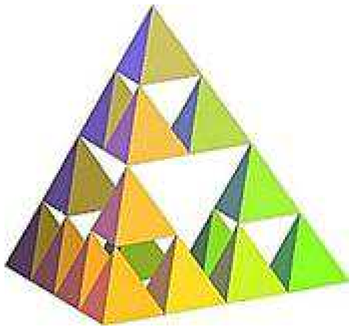
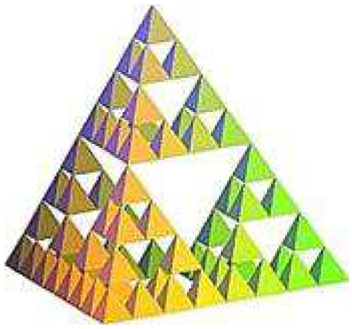
1) Sur le tétraèdre de Sierpinski lui-même.

Il s'agit de la figure que l'on obtient en partant d'un tétraèdre régulier (étape 0) et en itérant à l'infini l'opération suivante, appelée « opérateur de Hutchinson »: on passe de la figure obtenue à l'étape n à celle de l'étape n+1 en lui appliquant simultanément les quatre homothéties ayant pour rapport ½ et pour centre chacun des quatre sommets du tétraèdre initial.





Passage à l'ordre 1 puis à l'ordre 2.



Ordre 3

On montre que la suite des figures obtenues converge vers une figure qui est un point fixe pour l'opérateur précédent.

Pour le démontrer proprement il faut définir la « distance » entre deux figures (=parties compactes du plan). On utilise la « distance de Hausdorff » (http://fr.wikipedia.org/wiki/Distance_de_Hausdorff), et on montre facilement que l'opérateur précédent est contractant ; on peut alors appliquer le théorème du point fixe. Mais c'est trop dur pour la plupart des lycéens, sauf si l'on y passe un temps considérable et on peut sans doute se contenter d'une approche plus intuitive, car on « voit bien » au bout de quelques itérations que la figure semble ne plus changer d'un étape à la suivante.

Bien que plongé dans un espace de dimension 3, le tétraèdre de Sierpinski a un volume nul, puisqu'à chaque itération ce dernier est multiplié par 4/8=1/2. On peut dire que sa dimension est deux : en effet quand on lui fait subir une homothétie de rapport 2, sa « masse » est multipliée par 2^2, comme pour un disque.

2) Procédé de construction d'un tétraèdre géant :

Pour construire un tétraèdre de Sierpinski géant, on utilise du tourillon que l'on peut trouver dans un magasin de bricolage. C'est-à-dire des tiges de bois cylindriques de 9mm à 11 mm de diamètre, qui coûtent en France environ 1 euro le mètre. Une fois coupé à la bonne taille, on fixe à chaque extrémité un petit piton circulaire, après avoir pré troué avec une mini perceuse. C'est assez long mais pas très difficile. Les tiges sont assemblées avec du collier de serrage électrique en plastique passé dans les pitons. On démonte en coupant ces colliers avec des petites pinces coupantes.

On pourrait faire plein de petits tétraèdres de 50cm d'arête et les assembler. Ca marche, mais c'est assez fragile.

Je préfère maintenant faire directement des modules de 2m d'arête : on fait d'abord un grand tétraèdre d'arête 2m, avec des tiges relativement épaisses. Puis on fixe à l'intérieur un octaèdre formé de 12 tiges de 1m (on peut faire remarquer à cette occasion qu'on ne peut pas paver l'espace avec des tétraèdres réguliers). Puis à l'intérieur de chacun des quatre tétraèdres de 1m ainsi obtenus, on fixe un octaèdre de 50cm d'arête.

On peut ensuite assembler quatre grands tétraèdres pour obtenir un tétraèdre composé de 64 petits, mesurant 3,25m de haut pour une arête de 4m. Si l'on veut doubler encore la hauteur (6,5m), il faut d'abord poser un tétraèdre de 4m sur trois tétraèdres de 2m, puis poser le tout sur trois « pieds » composés chacun de 3 tétraèdres préalablement assemblés. Sinon, même avec de grands escabeaux c'est dangereux ;-)

3) **Construction de tétraèdres colorés par pliage :**

Il existe de nombreux procédés pour fabriquer des tétraèdres par pliage ; on en trouve pas mal sur Internet. Celui proposé par Valérie Larose dans le livre qu'elle a écrit chez ACl avec Didier Boursin sur les pliages est assez simple et rapide. On peut le voir ici. http://www.mathkang.org/pdf/tetraedrereg.pdf

Si on veut assembler ces tétraèdres, il faut les consolider un peu avec du scotch. On peut ensuite les fixer ensemble avec du scotch également. Si on le fait proprement, on peut récupérer les tétraèdres en enlevant le scotch.

L'idéal serait de faire des tétraèdres de couleur d'arête 12,5cm pour les insérer dans les tértaèdres d'arête 50cm. Mais avec du papier format A4, on n'obtient que 12,1cm d'arête. Cela m'a amené à chercher d'autre méthodes de pliage, mais qui malheureusement prennent plus de temps. En fait (je viens de faire l'essai), en modifiant un tout petit peu l'étape 2 du pliage indiqué en référence, on peut réaliser de parfaits tétraèdre d'arête 12,5cm : remplacer « plier chaque côté jusqu'au pli central » par plier chaque côté jusqu'à approximativement 2mm du pli central.

Je te laisse expérimenter tout ça et trouver tes propres méthodes.

4) Coloriage du tétraèdre de Sierpinski

Au départ, on ajoute une contrainte de coloriage du type : on utilise des tétraèdres de quatre couleurs différentes et il ne doit jamais y avoir deux tétraèdres en contact de la même couleur. Et de plus, cette contrainte doit être respectée à toutes les échelles ; mieux même ce serait bien de retrouver la même structure par un changement d'échelle de rapport 2, comme c'est déjà le cas pour le morne car monocolore tétraèdre de Sierpinski habituel.

Dès ce premier problème posé, il apparaît qu'à l'étape 1 (construction d'un « tétraèdre » composé de quatre tétraèdres élémentaires de couleurs différentes), il y a deux possibilités exactement. Et bien sûr il est intéressant de le faire justifier proprement par les élèves. Il y a donc deux types de tétraèdres d'ordre1.

Nota : les tétraèdres d'ordre zéro sont remplacés ici par des boules de sarbacane collées avec de la colle vinylique, c'est plus facile pour l'expérimentation.

Aux tétraèdres d'ordre 2 (composés de quatre tétraèdres d'ordre 1), nous demandons d'avoir quatre couleurs différentes sur chaque « super-arête ». Cela implique notamment que les quatre tétraèdres situés aux sommets sont de couleur différentes. On peut convenir d'attribuer à chaque tétraèdre, quel que soit son ordre, la couleur de son sommet extérieur.

On constate plusieurs choses dans un premier temps : on ne peut pas obtenir de tétraèdre d'ordre 2 répondant à cette contrainte si l'on emploie des tétraèdres d'ordre 1 de types différents. Et deuxièmement, une fois choisi ce type, il y a deux solutions. Et ces solutions sont semblables en termes de couleur (repérées par les sommets extérieurs) aux tétraèdres d'ordre 1.

On peut donc maintenant itérer le procédé

On peut remarquer qu'on passe d'une étape à la suivante en itérant un opérateur qui est composé de quatre similitudes de rapports 1/2

5) Etude des arêtes

On peut se poser la question : comment se comporte la suite des couleurs d'une arête ?

Appelons a,b,c,d les quatre couleurs. Examinons le tétraèdre d'ordre 2. L'arête qui joint la couleur a à la couleur d peut apriori avoir deux compositions :

abcd
ou
acbd

Une fois ce choix fait, les cinq autres arêtes sont déterminées. Par exemple, partant de abcd ; les six arêtes seront obtenues comme suit :

abcd,
acdb ; en effet si l'on commence par ac, on ne peut pas finir par d, et donc c'est d qui vient après c
adbc pour une raison similaire

Comme on a dcba, (en regardant abcd à l'envers), on a par le même raisonnement les deux arêtes :
dbac, et
dacb

Et la sixième arête ne peut être que badc (identique à cdab).

Tout se passe comme si on avait remplacé les arêtes du tétraèdre initial selon la règle

ab → acdb ... et bien sûr ba → bdca
ac → adbc
etc ... (6 lignes à écrire)

Mais il y a mieux : regardons ce que donne abcd (arête d'un tétraèdre d'ordre2) :lorsqu'on passe à l'ordre 3

abcd → acdb cabd

On voit qu'on intercale d'abord la seconde moitié de la chaîne, cd, dans la première, ab, puis la première moitié, ab, dans la seconde, cd. Et ceci est valable bien sûr quelle que soit l'arête à laquelle on s'intéresse.

On a ainsi un procédé simple pour construire la suite des couleurs de chacune des arêtes.

On peut d'ailleurs le faire sous Excel ; voici ce que ça donne (les chaînes ne sont pas écrites jusqu'au bout à partir de la cinquième)

a	b	c	d																																			
a	c	d	b		c	a	b	d																														
a	d	b	c		d	a	c	b		c	b	d	a		b	c	a	d																				
a	b	c	d		b	a	d	c		d	c	b	a		c	d	a	b		c	d	a	b		d	c	b	a		b	a	d	c		a	b	c	d
a	c	d	b		c	a	b	d		b	d	c	a		d	b	a	c		d	b	a	c		b	d	c	a		c	a	b	d		a	c	d	b
a	d	b	c		d	a	c	b		c	b	d	a		b	c	a	d		b	c	a	d		c	b	d	a		d	a	c	b		a	d	b	c
a	b	c	d		b	a	d	c		d	c	b	a		c	d	a	b		c	d	a	b		d	c	b	a		b	a	d	c		a	b	c	d
a	c	d	b		c	a	b	d		b	d	c	a		d	b	a	c		d	b	a	c		b	d	c	a		c	a	b	d		a	c	d	b
a	d	b	c		d	a	c	b		c	b	d	a		b	c	a	d		b	c	a	d		c	b	d	a		d	a	c	b		a	d	b	c
a	b	c	d		b	a	d	c		d	c	b	a		c	d	a	b		c	d	a	b		d	c	b	a		b	a	d	c		a	b	c	d
a	c	d	b		c	a	b	d		b	d	c	a		d	b	a	c		d	b	a	c		b	d	c	a		c	a	b	d		a	c	d	b
a	d	b	c		d	a	c	b		c	b	d	a		b	c	a	d		b	c	a	d		c	b	d	a		d	a	c	b		a	d	b	c
a	b	c	d		b	a	d	c		d	c	b	a		c	d	a	b		c	d	a	b		d	c	b	a		b	a	d	c		a	b	c	d
a	c	d	b		c	a	b	d		b	d	c	a		d	b	a	c		d	b	a	c		b	d	c	a		c	a	b	d		a	c	d	b
a	d	b	c		d	a	c	b		c	b	d	a		b	c	a	d		b	c	a	d		c	b	d	a		d	a	c	b		a	d	b	c

Ce tableau possède des propriétés intéressantes que je vous laisse découvrir. Toutes les trois étapes, on retrouve le même début.

La plus intéressante est sans doute que si l'on poursuit à l'infini la suite des couleurs d'une arête, cette dernière ne peut pas être périodique. Je vous laisse en découvrir la démonstration