Avec des triangles équilatéraux : éléments pour un atelier

1. Aspects mathématiques

Donner la définition générale d'un polyèdre n'est pas facile. Tout le monde sait ce qu'est un cube, une pyramide, un prisme. La surface de chacun de ces solides est un polyèdre. On voit bien qu'un polyèdre est une surface d'un seul tenant composée d'un nombre fini de polygones (appelés "faces") dont les côtés (appelés "arêtes") appartiennent à exactement deux faces. Les extrémités des arêtes sont les "sommets" du polyèdre. Cette définition nous suffira pour notre objet d'étude qui est les deltaèdres.

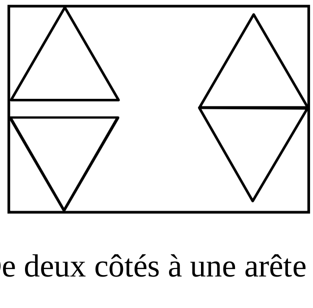
Un deltaèdre est un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Comme deux faces ont toujours une arête commune, toutes les arêtes, et donc toutes les faces sont égales.

En manipulant des pièces triangulaires en carton ou en plastique, il apparaît assez vite qu'on ne peut constituer un deltaèdre qu'à partir de quatre triangles équilatéraux. Qui plus est, le nombre de faces semble être toujours un nombre pair. Cette propriété peut-elle s'expliquer ? On peut remarquer qu'une pyramide à base carrée a cinq faces, et que donc il n'est pas vrai que tout polyèdre a forcément un nombre pair de faces. Par contre, c'est effectivement vrai des deltaèdres.

Pour le comprendre, il faut que les élèves saisissent qu'il y a des relations simples entre les nombres de faces, de sommet ou d'arêtes, qui sont liées de façon spécifique au fait qu'on travaille avec des triangles.

Dans toute la suite, on notera f le nombre de faces, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes d'un polyèdre. Pour un cube, qui n'est pas un deltaèdre, $f = 6$, $s = 8$, et $a = 12$. Pour un tétraèdre, $s = 4$, $f = 4$ et $a = 6$.

Chaque triangle possède trois arêtes. Si nous fabriquons un deltaèdre avec f faces, chaque face va apporter trois côtés, soit en tout $3f$ côtés. Mais chaque arête est obtenue en collant deux triangles. Elle est en quelques sorte constituée de deux côtés fusionnés.



De deux côtés à une arête …

Le nombre d'arêtes est donc égal à :

$$a = \frac{3f}{2}$$

On en déduit que $\boxed{3f = 2a}$

Cette formule nous permet d'affirmer deux choses : **le nombre de faces est forcément pair, et le nombre d'arêtes est forcément un multiple de 3.**

Pour ceux qui connaissent un peu d'arithmétique : c'est une conséquence du théorème de Gauss. Pour ceux qui ne connaissent pas, il est facile de comprendre qu'en multipliant un nombre par 3, on ne change pas sa parité, et qu'en le multipliant par deux, on ne change pas son caractère de divisibilité par 3.

Il n'existe pas de relation aussi simple entre les nombres de faces et celui des sommets parce que le nombre de faces par sommets n'est pas toujours le même. Par contre une formule très connue (on l'a même vue affichée dans le métro) ! est la formule d'Euler :

$$\boxed{s - a + f = 2}$$

Cette formule n'est pas valable pour tous les polyèdres mais seulement pour ceux qui si ils étaient élastiques et qu'on soufflait dedans auraient la forme non pas d'une bouée à un, deux ou plus de trous, mais celle d'un bon vieux ballon. On en trouvera une explication et un essai de démonstration dans le document joint (exposé présenté par des élèves de lycée au Congrès MATh.en.JEANS en 1995.

Cette formule n'est pas si facile à trouver par des jeunes si on ne les guide pas un peu. Avant d'en voir quelques conséquences, regardons ce qui se passe pour les sommets.

Il est "clair" que pour constituer un sommet, il faut au moins trois faces. Cela correspond au fait que pour déterminer un point, deux plans ne suffisent pas (s'ils se coupent, c'est selon une droite). Avec 3, 4, 5 triangles, pas de problème : on constitue de jolis sommets, plus ou moins pointus, mais pointus quand même. Mais avec 6 triangles, c'est possible encore, mais ce n'est plus pointu. Et avec 7, ça devient bizarre.

C'est une question de somme des angles : comme les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, à partir de 6 triangles par somme, on atteint 360° et ça devient "plat". Au delà, on a ce qu'on appelle une courbure négative. Avec une courbure négative, on ne peut plus fabriquer de beaux polyèdres convexes, c'est à dire sans creux, comme un œuf ou une boule, mais des espèces de haricots à l'intérieur desquels les points ne peuvent pas nécessairement être joints en ligne droite.

Donc si on veut des deltaèdres convexes (comme semble l'être la géode, par exemple), il est prudent de se limiter à cinq triangles par sommet (ce qui n'est pas le cas de la géode, bien entendu. Mais justement les triangles ne sont pas tous équilatéraux : la géode n'est pas un deltaèdre, mais ce qu'on appelle un dôme géodésique).

Regardons maintenant ce que nous donne la formule d'Euler si l'on a *n faces* par sommet (donc toujours le même nombre) :

Comme il y a 3 sommets par face et *n* faces par sommet, on va avoir :

$$s = \frac{3f}{n}$$

et donc en reportant dans la formule d'Euler :

$s - a + f = 2$, c'est à dire :

$\frac{3f}{n} - \frac{3f}{2} + f = 2$ et en réduisant au meme dénominateur :

$\frac{6f - 3nf + 2nf}{2n} = 2$ soit encore : $f(6 - n) = 4n$

et finalement : $\boxed{f = \frac{4n}{6-n}}$

On voit se pointer une première difficulté : il n'est pas possible que le nombre de faces oit constant et égal à 6 (essayez donc, pour voir) ! D'autre part, deuxième difficulté, à partir de 7, le nombre de faces serait négatif ! Les deltaèdres éventuels à 7 faces ou plus par sommet sont donc des polyèdres auxquels la formule d'Euler ne peut pas s'appliquer.

On voit aussi qu'avec 3 faces par sommets, le nombre de faces est 4, avec 4 faces par sommet il est de 8, et avec 5 faces par sommet il est de 20.

Cela laisse pas mal de possibilités pour les deltaèdres ayant 3, 4 ou 5 faces par sommet. Justement, il serait intéressant de les dénombrer, de voir lesquels sont convexes et lesquels non. Ce n'est pas un problème facile, cela demande de la méthode.

On peut cependant montrer que si le nombre de faces par sommets est inférieur à n (lui-même inférieur strictement à 6) et si notre polyèdre vérifie la relation d'Euler précédente, alors

$$\boxed{f \leq \frac{4n}{6-n}}$$

or le membre de droite est maximal pour n = 5 ce qui signifie que nous n'aurons pas dans notre collection de deltaèdres de plus de 20 faces.

Mais naturellement, on peut faire des deltaèdres avec autant de faces qu'on veut, et sans trous (ressemblant à une sphère si on les gonfle) à condition d'accepter des creux et des bosses par endroit. Sauriez vous le démontrer ? (Il y aura alors par endroit des sommets avec plus de 5 triangles)

Avec 7 triangles par face

On trouvera en annexe quelques éléments sur le "papier hyperbolique de Thurston" : c'est une couverture fabriquée avec des triangles équilatéraux à raison de 7 par sommet.

On trouvera également une généralisation de la formule d'Euler aux polyèdres "avec trous" :

$$\boxed{s - a + f = 2 - 2g}$$

g est le "genre du polyèdre", c'est à dire son "nombre de trous" (pas toujours évident à voir)…

$s - a + f$ peut donc être négatif ! Mais alors, pourrait-on fabriquer un deltaèdre, ressemblant en quelque sorte à un Bretzel, et qui aurait 7 triangles par sommet. J'aimerais bien en fabriquer un, ou même plus encore, que des élèves en fabriquent un.

Deux questions intéressante enfin :

Les deltaèdres flexibles : qui pourra nous en fabriquer. Et avec combien de faces ? (attention : il doit être vraiment flexible)

Fabriquer un deltaèdre sans intérieur ni extérieur, comme la bouteille de Klein.

François GAUDEL