

Objets mathématiques

François Gaudel
Professeur au lycée Louise Michel, Bobigny

Notre atelier s'est intéressé à l'utilisation d'objets pour favoriser ou susciter une activité mathématique vivante. Quatre interventions ont eu lieu, autour d'approches diverses : construction de deltaèdres et de polyèdres géants (François Gaudel), utilisation en classe entière de bouliers (Caroline Poisard) ; emploi de livres anciens, de documents historiques, d'outils logiciels (Jean-Alain Roddier) ; situations de recherche engendrées par la Valise « Maths à modeler » (Charles Payan).

On trouvera en annexe le compte-rendu global réalisé sur place par Catherine Ducourtioux, et dans ces actes, les compte-rendus des autres intervenants. Je vais dans ce qui suit présenter la partie que j'ai animée à partir de triangles en plastique permettant de fabriquer toutes sortes de deltaèdres, et de tiges de bois à l'aide desquelles nous avons construit deux polyèdres « géants ». Je m'interrogerai ensuite brièvement sur la notion d'objet mathématique, qui a été évoquée à plusieurs reprises durant cette Université d'été.

I-Activités autour des deltaèdres.



Les deltaèdres sont des polyèdres dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. J'ai fait travailler des groupes très divers sur ces polyèdres particuliers : atelier niveau collège sur une MJC, atelier niveau Terminale scientifique en lycée ; activité en classe entière dans le primaire (CM2) et groupes de 8-11 ans avec le Service Municipal de la Jeunesse de Drancy. Enfin, j'ai présenté l'activité lors de stages pour les professeurs des écoles sur les Réseaux d'Education Prioritaire de Drancy, Aulnay-sous-Bois, et plus récemment Noisy-le-Grand.

Le matériel utilisé est constitué de quelques centaines de triangles en plastique de type « Jovo » (il existe d'autres marques, tout aussi valables), de papier (certains deltaèdres peuvent être obtenus par pliage ou par tressage), de languettes de bois type « bâtons d'esquimaux », assemblées à l'aide d'agrafes et de colle ou de scotch, d'agitateurs pour cocktails collés au pistolet, de dessous de tartes en carton qui, dentelés, permettent de découper très facilement des triangles équilatéraux. (il suffit que le nombre de dents soit divisible par trois). Tout ce matériel est très peu cher, sauf les triangles en plastique qui sont cependant indispensables. L'abord de la construction de deltaèdres à l'aide de matériaux et par des méthodes variées concourt à l'apprentissage de leur nature abstraite et permet de fabriquer des formes que l'on conservera pour une exposition ultérieure.

L'activité peut commencer ainsi : on distribue des triangles en plastique, et, après avoir expliqué brièvement ce qu'est un deltaèdre, on propose d'en construire, en commençant par les plus petits possible. Très vite on voit apparaître des tétraèdres. On en fait compter les sommets, les arêtes et les faces, et on propose de continuer de façon à remplir un tableau du type :

Nombre de faces	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
4	4	6
6	5	9
...	...	...

Au cours de l'activité, on constate chez certains enfants une tendance à multiplier d'emblée les faces, sans chercher vraiment à en minimiser le nombre. D'autres, ou les mêmes croient nécessaire d'assembler les triangles « à plat », avant de refermer la figure. On voit des adultes faire de même. Le décompte des faces, des sommets, des arêtes, n'est pas toujours évident et nécessite souvent la mise en valeur de symétries (beaucoup d'élèves, au début, tournent la pièce en comptant les faces, ce qui rend les résultats surprenants). Chacune de ces tendances spontanées se prête à des explications et remarques.

Au bout d'une dizaine de minutes, le tableau commence à se remplir. On nomme les deltaèdres d'après leurs nombres de faces : tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, décaèdre, etc.

On obtient facilement les observations suivantes :

- Le nombre de faces est toujours pair
- Il faut au moins 4 faces pour faire un deltaèdre
- Il y a un seul tétraèdre (4 faces), un seul hexaèdre (6 faces), deux octaèdres, et ensuite de plus en plus de deltaèdres différents pour un même nombre de faces
- Pour un même nombre de faces, les nombres d'arêtes et de sommets sont identiques. Par exemple les deux octaèdres ont chacun 8 faces, 6 sommets et 12 arêtes.
- Les nombres de faces, de sommets et d'arêtes constituent des suites arithmétiques de raisons 2, 1 et 3

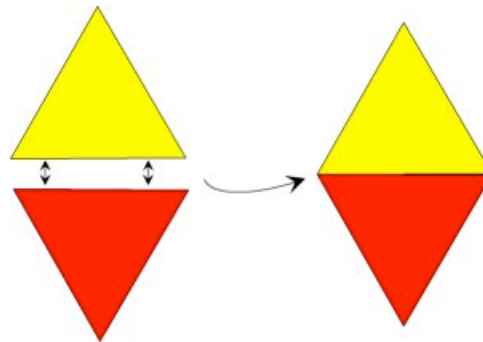
On notera qu'il s'agit ici de mathématiques purement expérimentales. On peut alors poser les questions suivantes :

- Pourquoi faut-il au moins quatre faces pour faire un deltaèdre ?
- Pourquoi le nombre de sommets peut-il augmenter unité par unité ?

Les réponses possibles sont simples mais pas forcément faciles à trouver ni à formuler.

- Pourquoi le nombre de faces est-il toujours pair ?

Sur cette question, on peut laisser chercher les participants à l'atelier... la réponse exige un certain degré d'abstraction car elle oblige à raisonner sur le lien qu'il y a entre les nombres de faces et d'arêtes. Ce lien apparaît évident à certains, beaucoup moins à d'autres, même une fois qu'on a dit qu'il y a trois arêtes par face et deux faces par arête. Pour qu'il soit bien clair, je le fais formaliser en distinguant les triangles, qui ont trois côtés, et les faces, qui ont des arêtes une fois assemblées. S'il y a f faces, il y a f triangles. Chaque triangle a 3 côtés, donc il y a $3f$ côtés. Mais quand on assemble les triangles, chaque arête est constituée par la fusion de deux côtés.



Donc il y a deux fois moins d'arêtes que de côtés, et comme le nombre d'arêtes est un entier, il faut que $3f$ soit pair. Le fait qu'il en découle que f est également pair présente toujours un intérêt, quel que soit le niveau des participants.

- Mais le nombre de sommets ?

Il est maintenant clair que nombre d'arêtes et le nombre de faces sont liés. Par la relation $a = 3f/2$. Mais d'où vient que le nombre de sommets en découle ? On n'a pas de raisonnement aussi simple parce que si chaque triangle a trois sommets, par contre chaque sommet peut être situé sur un nombre très variable de faces. On est donc amené à parler de la Relation d'Euler pour les polyèdres simplement connexes (bien sûr, on n'emploie pas ce vocabulaire, on explique la différence entre une bouée et un ballon) : $s - a + f = 2$ (nombre de sommets moins nombre d'arêtes plus nombre de faces égale deux) L'application de cette formule et de la précédente permet de calculer deux des grandeurs quand on connaît la troisième.

Question suivante (par exemple) :

- Est-ce que la géode est un deltaèdre ?

A partir des tentatives de construction de deltaèdres avec des triangles joints « à plat », donc à six par sommet, on fait voir qu'on s'interdit ainsi de fabriquer des « pointes », que le nombre maximum de triangles autorisés pour cela est cinq, et qu'à partir de six, il se passe des choses bizarres, qui permettent d'introduire deux notions : courbure (positive, négative), convexité. On en déduit qu'un deltaèdre convexe comporte au plus cinq faces par sommet et on propose d'essayer de construire le « plus grand » deltaèdre convexe possible, ce qui amène les participants à essayer avec cinq faces par sommet et donc à aboutir à l'icosaèdre régulier.

La géode est située à quelques kilomètres de Drancy et Bobigny. On voit sur sa surface des triangles qui ont l'air d'être équilatéraux, et pourtant elle semble convexe, sphérique, et pire, les triangles ont l'air d'être assemblés par six à leurs sommets. Naturellement, les triangles ne peuvent pas être équilatéraux. Mais est-ce qu'ils peuvent être assemblés par six ? à partir du collège on peut faire démontrer aux élèves à l'aide de la relation d'Euler que ce n'est pas possible. Et si l'on admet qu'en quelques points les triangles sont assemblés par cinq, on montre que sur une géode complètement sphérique, ces points seront au nombre de 12, comme les 12 pentagones d'un ballon de football.

Autres activités

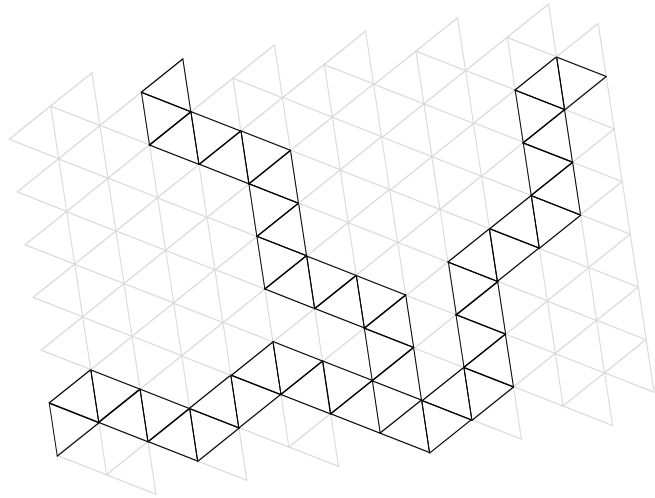
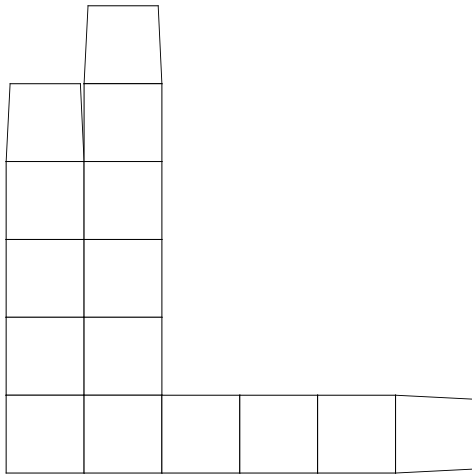
Beaucoup d'autres activités sont possibles.



Voici celles que j'avais posées à la rentrée 2003 dans mes ateliers de maths :

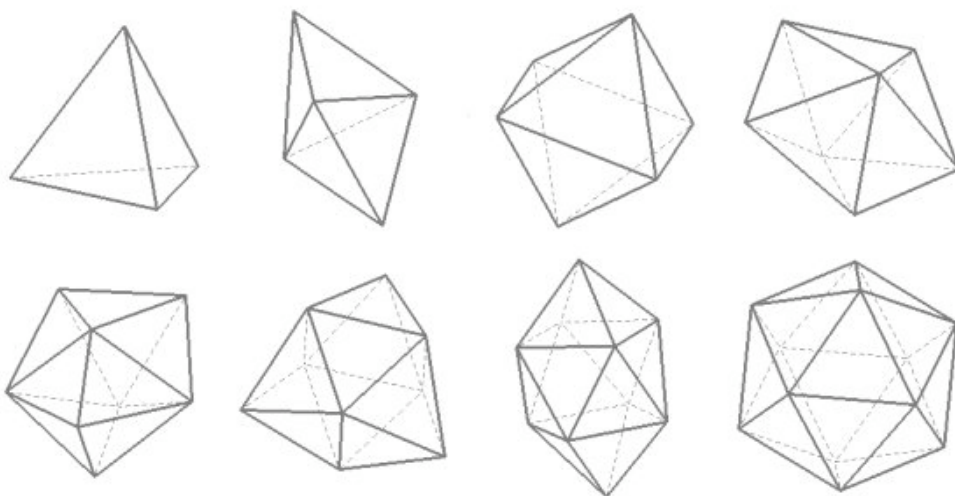
- Sujet(s) 1 : **problèmes d'existence** : étudier les nombres de faces, d'arêtes, de sommets des deltaèdres. Chercher à les dénombrer : combien y-a-t-il de deltaèdres à 4 faces, 5 faces, ... 10 faces, ... chercher tous les deltaèdres convexes ; chercher des deltaèdres dont tous les sommets comportent le même nombre de faces. Peut-on construire un deltaèdre dont tous les sommets comportent sept faces ?
- Sujet 2 : **Problèmes de coloriage** : combien les faces d'un deltaèdres doivent-elles posséder de couleurs distinctes pour que deux faces adjacentes ne soient jamais de la même couleur ? chercher des règles ; les démontrer. Peut on colorier un deltaèdre dont tous les sommets ont le même nombre de faces, n , avec n couleurs, de telle façon que chaque sommet possède n couleurs exactement et que deux faces adjacentes soient toujours différentes. Si oui, de combien de façons distinctes ?
- Sujet 3 : **tressage de deltaèdres** : ci dessous, on trouve deux découpages permettant de tresser à gauche, un cube, à droite un icosaèdre. Qu'est-ce qu'un tressage ?

chercher des découpages permettant de fabriquer certains deltaèdres par tressage. Est-ce toujours possible ?



Les sujets qui ont été effectivement choisis sont les suivants :

- Recherche de tous les deltaèdres convexes.



La première étape a consisté à chercher « à la main » les deltaèdres convexes, recherche qui a reçu une première confirmation... via Internet. Il existe huit deltaèdres convexes. Les nombres de faces vont de 4 à 20 (4 à 12 sommets), avec une exception pour dix-huit faces (11 sommets).

Les quatre élèves de Terminale S composant ce groupe ont cherché à démontrer qu'il n'existe que ces huit polyèdres convexes (existence et unicité). Ils ont trouvé des résultats intéressants : après avoir démontré qu'un deltaèdre convexe ne pouvait pas avoir plus de 20 faces, ils ont remarqué et justifié le fait que le tétraèdre et l'hexaèdre sont les seuls deltaèdres convexes ayant des sommets de degré trois (c'est à dire intersection de trois faces) ; pour les autres, si l'on appelle x le nombre de sommets de degré 4 et y celui des sommets de degré 5,

on a nécessairement $x + 2y = 12$, ou encore, si l'on appelle s le nombre de sommets : $x + s = 12$. Il en résulte que le nombre de sommets de degré 5 est pair. Un deltaèdre convexe à 18 faces devrait avoir 10 sommets de degré 5 et un de degré 4. La construction à partir de l'unique sommet de degré 4 ne laisse plus aucun choix, et aboutit à une impossibilité, ce qu'ils n'ont pas su cependant justifier d'une façon complètement satisfaisante, se contentant d'une preuve « pratique ».

- Coloriage des deltaèdres

Deux autres groupes ont travaillé sur le problème suivant : combien faut-il au minimum de couleurs pour colorier les faces d'un deltaèdre de façon à ce que les faces adjacentes ne soient jamais de la même couleur. Après une phase de recherche très empirique, ils ont eu du mal tout d'abord à formaliser ce qu'ils avaient trouvé. Par exemple, il paraît « évident » que quatre couleurs sont nécessaires pour colorier un tétraèdre de cette façon. Et ce genre de « preuve » par l'évidence semble suffisante dans la vie courante. Bien plus, si on arrivait à démontrer le contraire à l'aide d'une théorie quelle qu'elle soit, cela poserait certainement des questions sur la validité de cette théorie. Pourtant, si l'enseignant déclare ne pas comprendre pourquoi il est impossible de n'utiliser que trois couleurs ou moins, et demande qu'on le lui prouve, les explications deviennent assez vite confuses (les élèves l'admettent volontiers). On les voit se lancer à tour de rôle dans des déclarations qui commencent avec vigueur et finissent dans un murmure inaudible.

Ce premier obstacle passé, on remarque au bout d'un moment qu'on arrive pour tous les autres deltaèdres à se limiter à deux ou trois couleurs. Bien que manipulant beaucoup, les élèves, de collège comme de lycée, avaient du mal à discerner dans quel cas deux, dans quel cas trois couleurs étaient nécessaires. Ils ont fini par voir que lorsqu'il y avait des sommets de degré impair, trois couleurs étaient nécessaires, (suffisantes ?) puis, dans un second temps que lorsque tous les sommets étaient de degré pair, deux couleurs semblaient suffire. Ils ont démontré correctement qu'il fallait au moins trois couleurs dans le premier cas (il suffit de raisonner sur un sommet), et que d'autre part quatre couleurs suffisaient toujours : en effet si nous disposons d'un stock de quatre couleurs et colorions successivement toutes les faces dans un ordre quelconque, au moment de colorier une face, il reste toujours une couleur disponible au moins puisqu'elle n'est adjacente qu'à trois autres faces.

La suite était plus délicate. Pour le cas de deux couleurs je les ai guidés en leur conseillant de passer au dual (et donc en leur expliquant ce que c'est) et en leur proposant une démarche portant sur la longueur des chemins d'une face à l'autre (c'est à dire d'un sommet du dual à un autre) : si la parité de la longueur est conservée quel que soit le chemin suivi, alors deux couleurs suffisent toujours : ayant choisi de façon arbitraire la couleur de l'une des faces, la couleur d'une autre face sera déterminée par la parité commune aux longueurs des chemins qui la joignent à cette première face. Dire que la parité des longueurs est conservée revient à démontrer que tout circuit est de longueur paire, ce qui est vrai si tous les circuits qui correspondent aux sommets du deltaèdre sont eux-mêmes de longueur paire (et si le deltaèdre est simplement connexe). Ce n'était pas simple, mais au moins les élèves ont réfléchi là-dessus avec intérêt, et ont vu qu'un changement de point de vue peut être fructueux.

Pour le cas général (trois couleurs), je les ai également aidés, mais ils ont beaucoup mieux intériorisé et se sont montrés capables d'exposer clairement une méthode consistant en résumé à essayer de colorier le maximum de faces avec trois couleurs. Puis, sur l'un des coloriages présentant un maximum absolu de faces coloriées, à « déplacer » les cases non

coloriées en respectant la règle d'adjacence. On montre d'abord qu'il ne peut pas y avoir plus d'une case non coloriée, puis on montre qu'on peut déplacer cette face si elle existe de façon à la colorier avec l'une des trois couleurs. Donc il ne peut y avoir de face non coloriée.

Ce problème de coloriage qui me paraissait a priori plus simple à aborder parce que plus intuitif dans son énoncé et plus visible dans ses conclusions que celui sur les polyèdres convexes, s'est révélé plus ardu pour les élèves, qui ont pourtant expérimenté avec beaucoup de conviction : difficultés à découvrir les conjectures à démontrer. Difficulté à formaliser des démonstrations qui leur semblaient claires (cas du tétraèdre, nécessité de 3 couleurs quand un sommet au moins est de degré impair). J'ai retrouvé dans leur démarche un empirisme une tendance à accumuler des données sans les analyser que j'avais déjà rencontrées dans des groupes travaillant sur des sujets de recherche. Je les voyais construire beaucoup, mais je ne les voyais pas examiner les figures produites avec soin pour comprendre pourquoi c'était possible dans tel cas et pas dans tel autres. Est-ce un effet de l'enseignement ? Cela me porte en tout cas à croire que tel qu'il est fait, il réussit mieux à leur faire utiliser les notions relativement abstraites qu'on leur propose comme des règles qu'on répète, que comme des outils de connaissance.

Le résultat reste cependant positif puisque parmi ces élèves, ceux qui ont loupé leur bac sont revenus à l'atelier cet année, avec d'ailleurs un certain enthousiasme. Mais ce n'est pas exactement ce que j'attendais car l'objet n'a pas amené de lui même les situations mathématiques intéressantes : la notion de dual ne découle pas naturellement de ce genre de problématique, et j'ai dû l'importer de l'extérieur.

Il est vrai que s'ils avaient cherché plus systématiquement, ils auraient pu avoir l'idée de regarder ce qui se passait vraiment quand on changeait les faces de couleur pour optimiser le coloriage. Mais les triangles en plastique ne s'y prêtaient pas bien car ils étaient pré-colorés. Il aurait fallu un système coloriable et effaçable. Faute de quoi, on en était réduits à des « expériences de pensée », courantes en mathématiques, certes, et même en physique, mais qui justement se passent de tout objet matériel. Par rapport à la problématique qui est d'examiner comment des objets peuvent être utilisés pour faciliter l'accès à des situations mathématiques, on voit ceci : il ne suffit pas que l'objet pose le problème pour qu'il en permette une mathématisation intéressante.

▪ Tressage, deltaèdres « à la Thurston »

Le sujet sur le tressage a semble-t-il inspiré un élève de sixième d'un collège voisin puisque dans le cadre de l'atelier animé par des collègues, il a trouvé une méthode de tressage tout à fait valable du tétraèdre. Je n'en dirai pas plus car je n'ai pas du tout assisté à cette activité et n'ai vu que le résultat.

La question d'un deltaèdre possédant sept faces par sommet, et donc dont chaque sommet serait le lieu d'une courbure négative est intéressante à plusieurs titres. La relation d'Euler permet de voir qu'un tel deltaèdre devrait posséder un nombre pair de trous et un nombre de faces multiple de 28. Ce problème a intéressé en 2002-2003 le groupe d'élèves qui s'est attaqué l'année suivante aux deltaèdres convexes. Cependant, sur ce sujet précis, ils ne sont pas allés au delà de la fabrication de formes curieuses, sans mise au point d'une méthode de recherche un peu systématique.



II-Construction de polyèdres géants

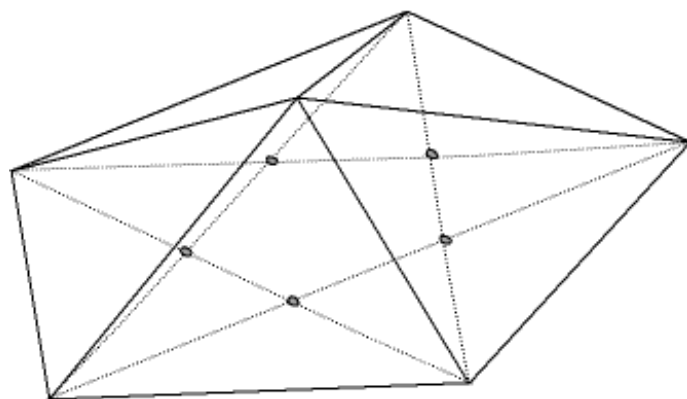
Trouver une méthode simple, ne demandant pas trop de soin, pour construire des polyèdres, n'est pas évident. Il existe des kits de construction, mais relativement chers et qui ont tous leurs limites. A l'occasion des rencontres CNRS Sciences et Citoyens d'Ile de France, nous avons lancé un concours « triangles en folie » : il s'agissait de construire des formes mathématiques ayant un caractère esthétique intéressant, et dont la structure soit à base de triangles équilatéraux. Nous nous étions également engagés à organiser pour le forum d'ateliers scientifiques de la Région Parisienne qui se déroulait pendant ces rencontres, une animation de construction de polyèdres géants.

Le défi étant lancé, restait à trouver la méthode. Après avoir visité les magasins de bricolage du coin, et pris quelques conseils auprès d'adhérents de la Maison des jeunes versés dans le travail manuel, j'ai acheté des tiges de bois en forme de tourillon d'un mètre de long et 8mm de diamètre (1€ environ la pièce) aux extrémités desquelles nous avons vissé sans difficulté des pitons circulaires de 2,5*10 mm. Assemblés à l'aide de colliers de serrage pour fil électrique, dont le prix à l'unité est négligeable si on les achète par sachets de 100 ou plus, ces tourillons nous ont permis de construire des figures. Tout ce matériel se trouve couramment dans les grandes surfaces de bricolage. Il peut être nécessaire de commander le tourillon. Avec du tourillon moins épais (6 mm) et des pitons de 2,25*10 (plus difficiles à trouver) on peut constituer des tiges plus courtes (50 cm) pour fabriquer des figures moins volumineuses.

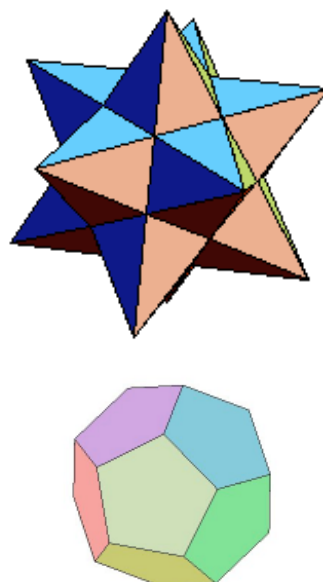


*deux objets mathématiques reliés par un troisième ...
naturellement, le collier doit être serré davantage.*

Que peut-on espérer faire avec ces tiges ? je présenterai les différentes figures réalisées dans l'ordre chronologique. Avec quelques animateurs et bénévoles de la MJC, nous avons tout d'abord testé le procédé en construisant un **icosaèdre**. Mais l'occasion étant trop belle, nous ne nous sommes pas arrêtés là. Un icosaèdre possède deux types de diagonales : celles qui passent par son centre de symétrie et joignent des sommets séparés par trois arêtes, et celles qui joignent des sommets séparés par deux arêtes.

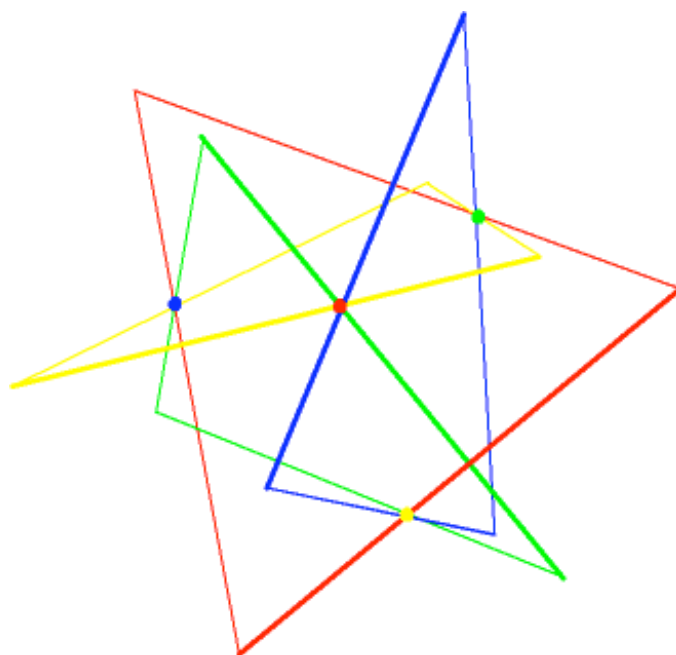


On voit ici cinq faces d'un icosaèdre formant un sommet et cinq diagonales du second type (en pointillé) qui forment un pentagone étoilé régulier et se recoupent aux sommets d'un pentagone convexe également régulier. Nous avons joint les sommets le long de ces diagonales à l'aide de cordon utilisé pour les piquets de camping, qui coulisseraient bien dans les pitons, et constitué ainsi à l'intérieur de notre icosaèdre un **petit dodécaèdre étoilé de Poincaré** (ses douze faces sont les pentagones étoilés de la figure ci-dessus) et un **dodécaèdre régulier convexe** (dont les douze faces sont les pentagones réguliers de la même figure).

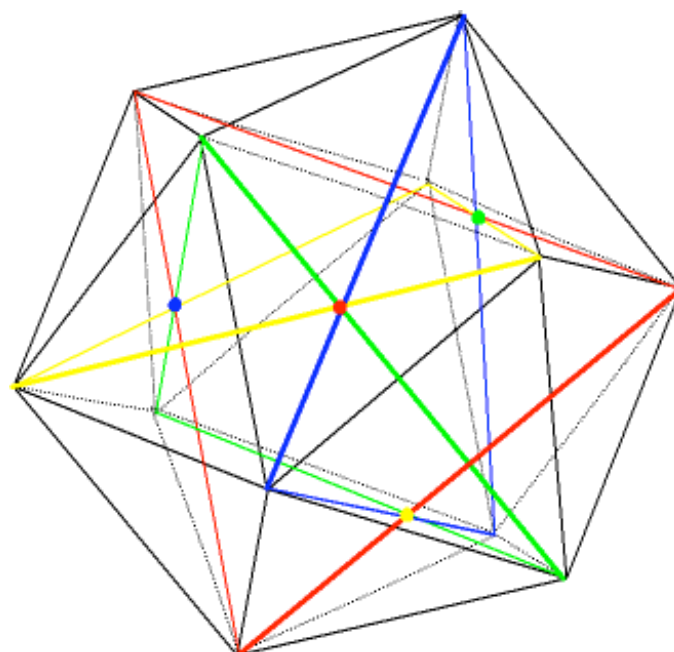


à gauche, l'objet réalisé pour la première fois (moins de deux heures sont nécessaires), et à droite le petit dodécaèdre étoilé de Poincaré et le dodécaèdre régulier convexe qu'on peut voir à l'intérieur.

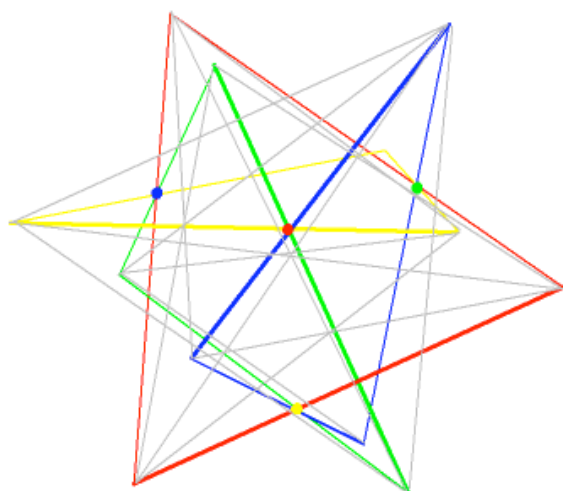
Toujours pour tester ce qui était faisable avec ce matériel, nous avons réalisé une autre figure intéressante, qui avait été l'objet d'une activité antérieure :



Il s'agit de quatre triangles équilatéraux. Ces triangles se coupent trois à trois en un point qui divise les côtés dans la proportion du nombre d'or. Les quatre points d'intersection forment un tétraèdre régulier dont le groupe de rotation laisse les quatre triangles invariants. Les 12 sommets des triangles sont ceux d'un icosaèdre régulier (ce qui permet d'en comprendre la construction). En perçant les tiges au bon endroit et en les liant à l'aide de fil de nylon, on réalise l'objet sans difficulté. En libérant une intersection, on le plie et il est donc transportable.



Si on complète cet objet à l'aide de baguettes de même longueur joignant les sommets, on obtient le petit dodécaèdre étoilé de Poincaré, ce qui a toujours beaucoup de succès avec de petits groupes de jeunes :



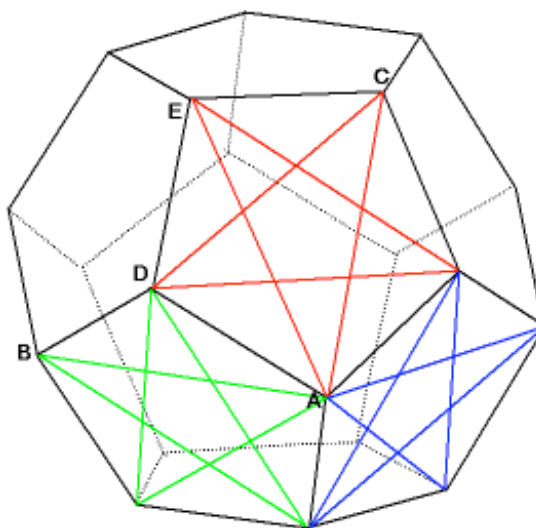
Lors du Congrès MATH.en.JEANS (fin mars 2004), nous avons organisé une première activité publique de construction de polyèdres géants. Ne pouvant construire de **dodécaèdre** régulier car les faces n'en seraient pas rigides, nous avons eu l'idée de réaliser douze pentagones étoilés qu'il est facile de rigidifier à l'aide d'un collier de serrage bien placé.



Nous avons ensuite assemblé ces pentagones, trois par sommet, et avons obtenu une figure assez spectaculaire (photo prise lors d'une opération « Cité Sciences » en juillet) :



Un jeune du club a alors remarqué qu'il « voyait » des cubes. Et tout le monde les a alors vus : il y avait cinq magnifiques cubes à l'intérieur de notre dodécaèdre. La question qui vient naturellement à l'esprit est : pourquoi ? est-ce qu'on peut répondre « sur le tas » ? pour des lycéens, ou de très bons collégiens, on peut avancer l'argument suivant :



Que les segments $[AB]$ et $[AC]$ soient de longueurs égales, découle de la régularité du polyèdre. Pour montrer qu'ils sont orthogonaux, nous remarquons que $[AC]$ et $[DE]$ sont parallèles. Or les longueurs DB et DA sont égales, ainsi que les longueurs EB et EA . Donc $[ED]$ est dans le plan médiateur de $[AB]$, donc est orthogonal à $[AB]$. Ainsi, en A , on trouve deux triplets de trois segments de même longueur et orthogonaux deux à deux. Cet argument suffit à emporter la conviction, surtout si on a la figure devant soi, mais ne constitue cependant pas une preuve mathématique suffisante diront certains puisqu'il faut encore que les sommets et les arêtes se répartissent bien sur cinq cubes. Il me semble que le mot « preuve » n'est pas ici très adapté. Celui de « démonstration » serait plus exact pour caractériser ce qui manque, c'est à dire une déduction rigoureuse sur la base de définitions abstraites.

Notre plus grand polyèdre peut ensuite être construit : après avoir matérialisé le dodécaèdre convexe à l'aide de cordelette de camping, nous construisons douze « pointes » (c'est à dire des pyramides à base pentagonale) dont les arêtes ont toujours la même longueur de un mètre, sur les douze faces pentagonales. Nous obtenons de nouveau le petit dodécaèdre étoilé de Poincaré. On le voit page ci-après avec de vaillants constructeurs, lors de la fête de la ville de Drancy, fin mai 2004. En joignant les sommets, nous obtenons un icosaèdre régulier.



Quelques questions posées : pendant la construction des diagonales de l'icosaèdre, on s'interroge naturellement sur la possibilité d'utiliser un seul morceau de cordelette. C'est l'occasion de faire remarquer que ce n'est pas possible parce que de chaque sommet partent cinq diagonales, et de parler des sept ponts de Koenigsberg. On peut ensuite se demander si on aura assez de cette même cordelette, et donc chercher quelle longueur en est nécessaire.

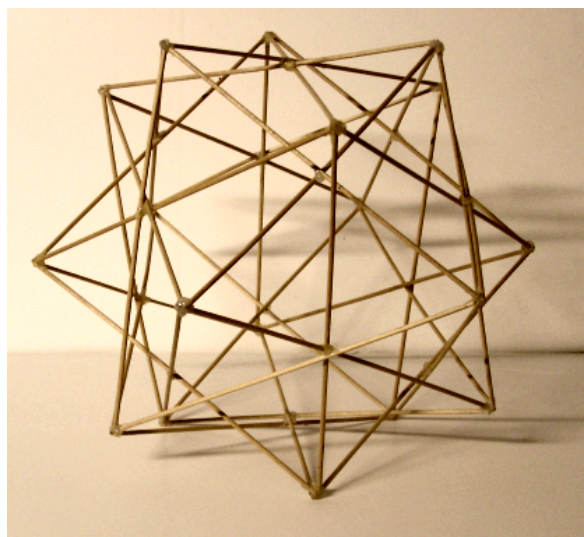
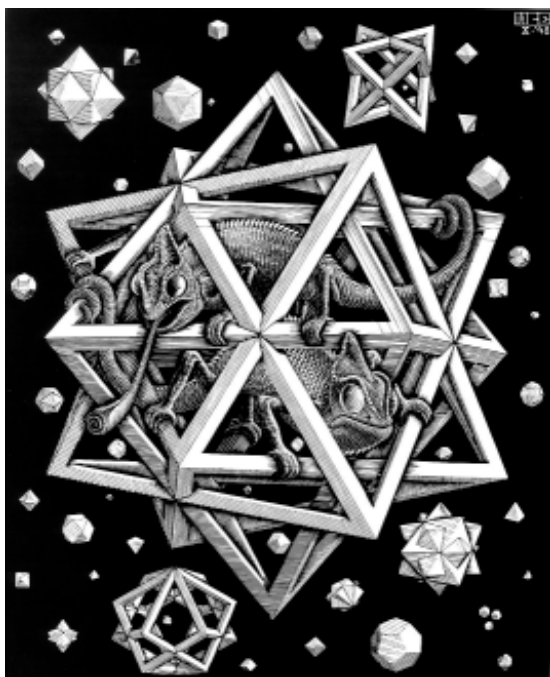
Cela amène à calculer la diagonale du pentagone d'arête 1, égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, le nombre de diagonales ($\frac{12*5}{2} = 30$), soit une longueur de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} * 30 \approx 48,54101966249$

Cette précision affolante nous permet d'affirmer que puisqu'une bobine contient 40 m, deux seront nécessaires !... détail étonnant, mais qui s'explique, la longueur nécessaire pour la dernière étape de notre plus grand polyèdre est exactement la même.

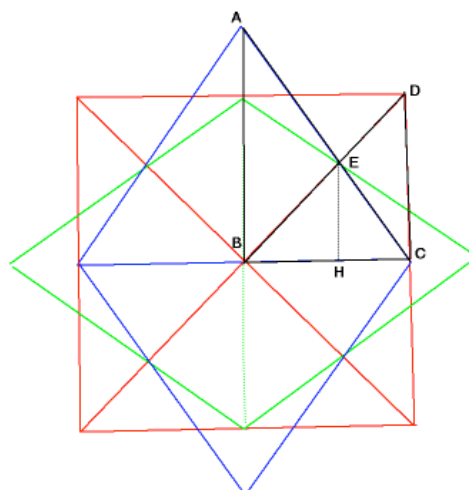
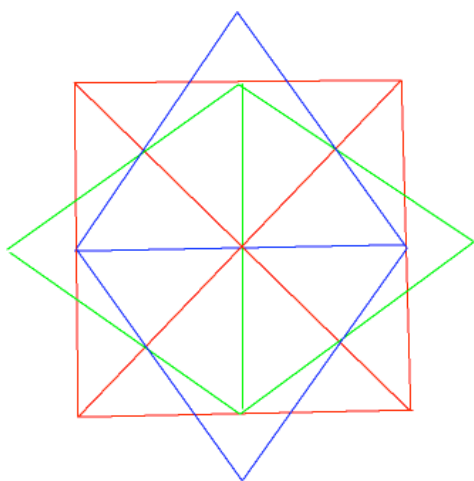
Nous avons également eu besoin de savoir si notre très grand icosaèdre tiendrait dans la salle de l'Espace @venir où se déroulent les activités du club de la MJC. J'ai donc proposé à l'un des membres du club, élève en seconde, de calculer sa hauteur prévisible. Ce qu'il a fait (à une erreur de calcul près), en utilisant notamment la longueur de la diagonale principale du cube inscrit. On trouve $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \approx 2,45m$. Son résultat (une fois corrigé) n'avait pas la même forme que le mien, mais naturellement la calculatrice donnait les mêmes approximations : l'occasion de montrer qu'avec les racines carrées, des formes très différentes peuvent masquer des quantités égales .. et de faire le calcul pour le démontrer.

Autres objets :

j'avais donné à une élève de troisième, membre du club, une reproduction de gravure d'Escher, avec pour mission de reproduire la « cage » centrale à l'aide de baguettes collées : page suivante, on voit la gravure et le résultat (primé lors du concours « triangles en folie »).



Cette figure est constituée de trois octaèdres imbriqués (c'est la première chose à constater). Comme on peut le voir sur la figure pleine dessinée immédiatement à droite et en dessous de la gravure principale, il y a deux types de sommets et deux types d'arêtes. Certaines arêtes se coupent par deux en leur milieu et sont perpendiculaires (à l'intérieur du troisième octaèdre). Les autres se coupent selon une symétrie d'ordre trois, la question pour pouvoir construire l'objet étant de savoir en quel point. Il a fallu pas mal de tâtonnements pour résoudre le problème. Nous avons projeté orthogonalement l'ensemble des trois octaèdre parallèlement à l'axe de deux sommets dont les arêtes sont complètement extérieures. On obtient la figure suivante :

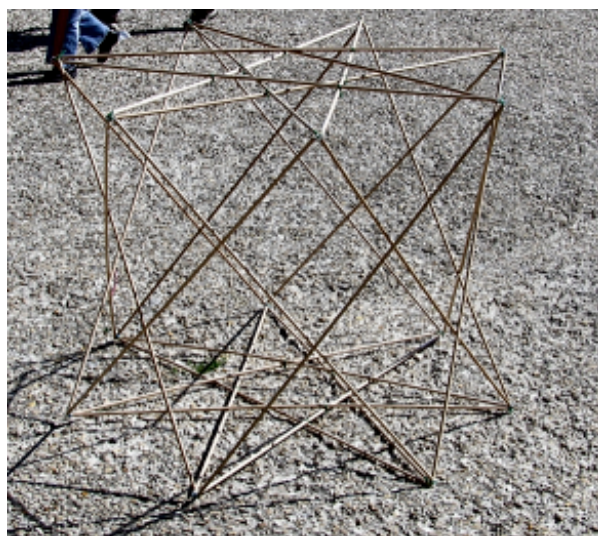


Les huit sommets extérieurs de la figure sont sur un cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, les arêtes étant toujours supposées de longueur 1. On a d'après Thalès et en tenant compte de ce que $BH=EH$: $\frac{AE}{EC} = \frac{BH}{HC} = \frac{EH}{HC} = \frac{BA}{BC} = \sqrt{2}$. On en déduit que $EC = \sqrt{2} - 1$, soit $0,414m$.

Cette figure a été réalisée à nouveau avec les tiges lors du Salon des jeux et de la Culture mathématique, place Saint-Sulpice à Paris au mois de juin, sous la direction de l'élève qui avait réalisé la maquette l'année précédente.



Pour finir, je signale deux autres possibilités au moins : construction d'antiprismes, et construction de triangles imbriqués non sécants, tenus à la distance voulue à l'aide de fils de nylon de la bonne longueur.



Un joli défi à relever serait la construction de ces cinq tétraèdres inscrits dans un dodécaèdre :



Quelques conclusions

Les exemples qui précèdent me paraissent montrer que certains objets se prêtent particulièrement bien à une activité et à une réflexion mathématique. Un certain nombre de conditions sont requises lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre une pratique vivante : la manipulation ou la construction de l'objet doit être simple, attrayante, poser de façon naturelle des questions variées, et, dans toute la mesure du possible, aider à la résolution des questions posées. Il est rare que toutes ces conditions soient réunies.

Par exemple, les triangles de plastique sont parfaitement adaptés à l'exploration et la classification des différents types de deltaèdres, aux comptages qu'on peut effectuer dessus, mais beaucoup moins à l'étude de leur coloriage. Pour un autre problème de coloriage, sur un tore cette fois, j'avais donné il y a quelques années à mes élèves l'idée d'utiliser un rectangle quadrillé, et cela s'était révélé d'autant plus fécond que l'usage d'un logiciel de dessin avait permis de diminuer très rapidement le nombre de carrés, une fois la propriété cherchée trouvée.

Il n'est pas douteux que la règle et le compas, héritiers de la corde des arpenteurs égyptiens, aient joué un rôle de premier plan dans le développement des mathématiques, ni que les calculatrices et ordinateurs soient appelés à faire de même à l'avenir. Cependant, dans ce dernier cas, il y a une particularité importante : il est très difficile de savoir ce qu'on fait exactement lorsqu'on les manipule : ils se rapprochent par là des instruments utilisés dans les sciences dites « expérimentales » (physique, biologie, etc.) Pour ma part je les ai utilisés en atelier pour explorer des objets (grands nombres, pavages, fractales).. qui sans cela seraient restés inaccessibles. En l'occurrence, les élèves ont fait un peu de programmation, mais à mon sens cela n'a rien d'obligatoire.

Les tiges utilisées pour fabriquer des polyèdres et d'autres figures, ont permis d'aborder très rapidement de nombreuses propriétés géométriques et de faire des démonstrations et des calculs « sur le terrain ». Leur intérêt ne s'est donc pas limité au fait qu'elles permettaient des réalisations spectaculaires.

Un objet mathématique peut se présenter d'autres façons : c'était le cas du boulier, des documents, des casse-têtes de la valise maths à modeler, qui ont été présentés dans l'atelier. Tous nous ont amenés à faire des maths. Mais on aurait pu aussi nous donner une conjecture ou nous poser une question et nous laisser chercher, comme on le fait dans MATH.en.JEANS, ou bien encore nous donner un exercice à chercher, ce qui est quand-même l'objet mathématique manipulé le plus souvent par les élèves dans l'enseignement.

Les calculatrices, utilisées de façon intelligente, font certainement partie également des objets mathématiques. Cela fait d'ailleurs une petite trentaine d'années qu'on réfléchit à la question, et pour ce que j'en connais, elles sont aujourd'hui très largement utilisées – conformément d'ailleurs aux programmes- pour des activités très variées. Entre temps, elles ont perdu un peu de leur caractère proprement mathématique du fait de leur banalisation pour devenir des objets d'usage courant et comme tels réputés sans mystère. Dans certaines sections, les élèves renâclent à les acheter et n'hésitent pas à sortir leur téléphone portable pour faire des calculs élémentaires !

Par ailleurs, les mathématiques constituent une science qui se prête à une abstraction rapide et poussée, et où l'on utilise peu de matériel. Ces deux caractéristiques font qu'on ne les range pas, d'habitude, parmi les sciences expérimentales. Mais, et sur ce point je pense rejoindre ce qu'a dit Martin Andler dans son exposé, la déduction n'est pas le seul mode par lequel elles se développent. L'expérience, en particulier, y intervient, sous de multiples formes. Sans minimiser la difficulté à raisonner abstraitement, qui doit être reconnue en tant que telle, il me semble qu'une des causes possibles de l'échec de certains élèves en mathématiques peut venir d'une lacune dans le lien à l'expérience. De plus, s'il est vrai que la fréquentation d'espaces abstraits finit par leur donner une vie et une beauté propres, le lien, même ténu, qui les relie à la réalité qu'ils formalisent me paraît de nature non à les appauvrir mais à les enrichir.

La recherche d'objets susceptibles d'aider à un apprentissage vivant des mathématiques me semble donc bien d'actualité. Ces objets doivent favoriser à la fois l'intérêt, la manipulation, et l'accès à l'abstraction. Joli programme !