Atelier sur les géométries finies

Animé par François GAUDEL

Le but de cet atelier était de présenter les contenus et les développements possibles d'une activité sur les géométries finies expérimentée au cours de l'année scolaire 1999-2000 dans deux ateliers : l'un en lycée avec essentiellement des élèves de seconde, l'autre sur une Maison des Jeunes et de la Culture avec cette fois des collégiens, et une élève de première année de DEUG.

Principe des ateliers "Exploration mathématique"

Ce principe, assez souple, consiste à faire découvrir, explorer, réaliser ou construire par divers moyens des formes mathématiques. La construction implique dès le départ une certaine compréhension de ce qu'on fait, et est l'occasion de poser de nouvelles questions. L'enseignant apporte des éléments de base et des références historiques. Les élèves exposent aussi bien leurs œuvres que leur contenu mathématique, voire le résultat de leurs recherches lors du Congrès MATh.en.JEANS.

La partie réalisation impose ses propres contraintes de soin, de méthode et de durée. J'ai pu constater que le temps qu'on y consacre n'est pas un obstacle à l'approfondissement des questions mathématiques sous-jacentes. Plus cette partie de l'activité est réussie, plus les élèves sont motivés pour expliquer ce qu'ils ont construit, et parfois créé ou conçu. D'autre part, les thèmes proposés doivent permettre à la fois de réaliser des formes étonnantes, difficiles à imaginer ou construire de prime abord (c'est l'apport spécifique des maths) et n'exiger qu'un bagage mathématique accessible aux élèves présents à l'atelier, avec une entrée pas trop compliquée et des développements éventuels dont la justification apparaisse clairement.

Avantages des géométries finies

Bien qu'elle ait été menée en lycée avec des effectifs plus réduits qu'à l'ordinaire (bas étiage du club), l'activité sur les géométries finies m'a paru très réussie, sans doute pour plusieurs raisons :

- La représentation de ces géométries présentait des possibilités variées dans lesquelles les élèves ont fait preuve de créativité.
- Tous les niveaux ont pu s'exprimer, du collège à la première année de DEUG, au sein d'un même exposé.
- Il y a une grande richesse de problèmes dans ce domaine avec des niveaux de complexité qui croissent assez vite, même avec des énoncés simples.
- On travaille à partir d'axiomes à partir desquels on construit des modèles. Il y a un passage constant de l'abstrait au concret et réciproquelment.

Lors de l'Université d'été …

J'ai présenté un certain nombre de concepts de base sur le sujet, ainsi que les objets créés et leur signification. Il n'est pas question ici de présenter un cours sur les géométries finies. Aussi je partirai à nouveau des objets créés par les élèves. Ceux qui voudraient approfondir la question trouveront l'essentiel de ce qui m'a servi dans deux ouvrages :

- Burkard POLSTER : A geometrical picture book, chez SPRINGER
- Emil ARTIN : Algèbre géométrique, GAUTHIER-VILLARS, rééd chez Jacques GABAY (surtout le chapitre 2)

Géométrie ?

Une "géométrie" sera pour nous constituée d'un ensemble non vide de "points" et un ensemble non vide de "droites". Les droites sont des ensembles de points contenant au moins deux points, et chaque point appartient à au moins deux droites. La définition est parfaitement symétrique en termes de points et droites : on pourrait tout aussi bien dire que les points sont des ensembles de droites, que chaque droite appartient à au moins deux points etc..

Deux droites parallèles sont des droites disjointes ou confondues.
Deux points sont parallèles s'ils n'appartiennent pas à la même droite ou si ils sont confondus.

Il est immédiat que les deux relations de parallélisme sont des relations d'équivalence.

Les droites ne seront pas obligatoirement représentées, dans le plan ou l'espace, par des droites au sens usuel : tout d'abord parce qu'elles ne possèderont qu'un nombre fini de points, et ensuite parce que la plupart du temps, ces points ne seront même pas alignés au sens usuel.

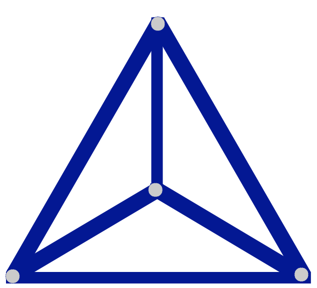
Images et représentations spatiales de plans affines finis :

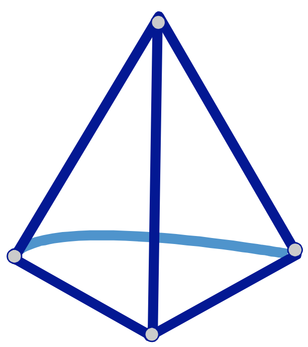
Les axiomes d'un plan affine sont les suivants :

C'est une géométrie pour laquelle

1. Deux points distincts appartiennent à une droite et une seule
2. Une droite et un point étant donnés, il existe une droite et une seule passant par ce point et parallèle à cette droite
3. Il existe trois points non alignés (c'est à dire n'appartenant pas à la même droite).

Si l'on demande aux élèves de fabriquer le plan affine ayant le moins possible de points, ils trouveront rapidement une bonne réponse, et peuvent même prouver qu'en terme d'ensembles de droites et de points, toutes les solutions sont équivalentes :





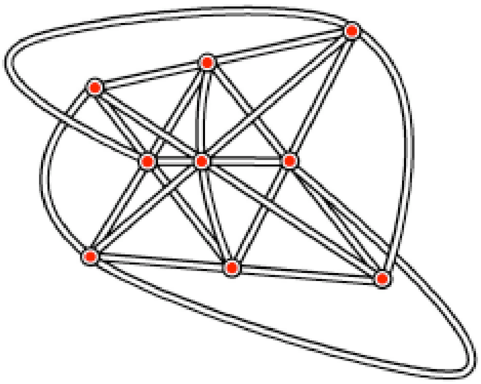
La deuxième représentation donne l'idée d'un tétraèdre, ce qui est effectivement une intéressant par les symétries que cela fait apparaître. Sur les dessins les droites apparaissent comme des segments reliant les points. Cependant elles ne sont constituées que des extrémités de ces segments.

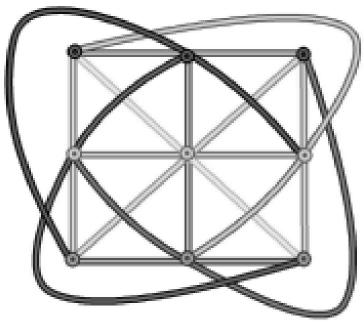
Nous sommes ici devant le plan affine d'ordre deux. Ce plan comporte six droite, quatre points, trois faisceaux de droites parallèles, comportant chacun deux droites.

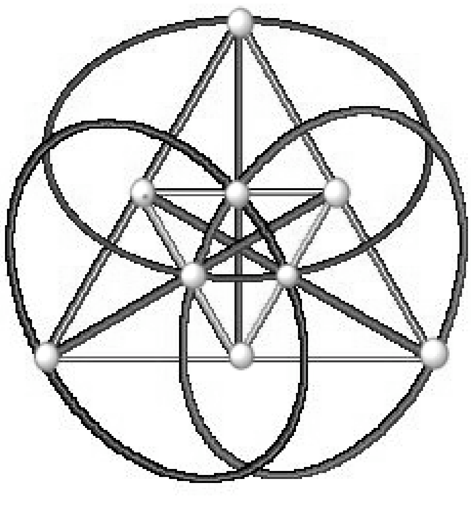
La démonstration de la propriété suivante s'appuie par exemple sur les faisceaux de droites parallèles ; elle est accessible à des élèves de seconde :

Prop : Dans un plan affine fini, toutes les droites comportent le même nombre de points, *n.* On parle alors du plan affine d'ordre n et il comporte n^2+n droites, n^2 points, $n+1$ faisceaux de n droites parallèle ; enfin chaque point appartient à $n+1$ droites distinctes.

La démonstration peut être approchée dans la recherche d'un plan affine comportant au moins cinq points, menée d'abord de façon empirique, puis en réfléchissant à ce qu'on fait. Voici quelques représentations "du" plan affine d'ordre 3 dues aux élèves. Que ce plan affine soit unique, et en quel sens, est un problème intéressant à soulever.







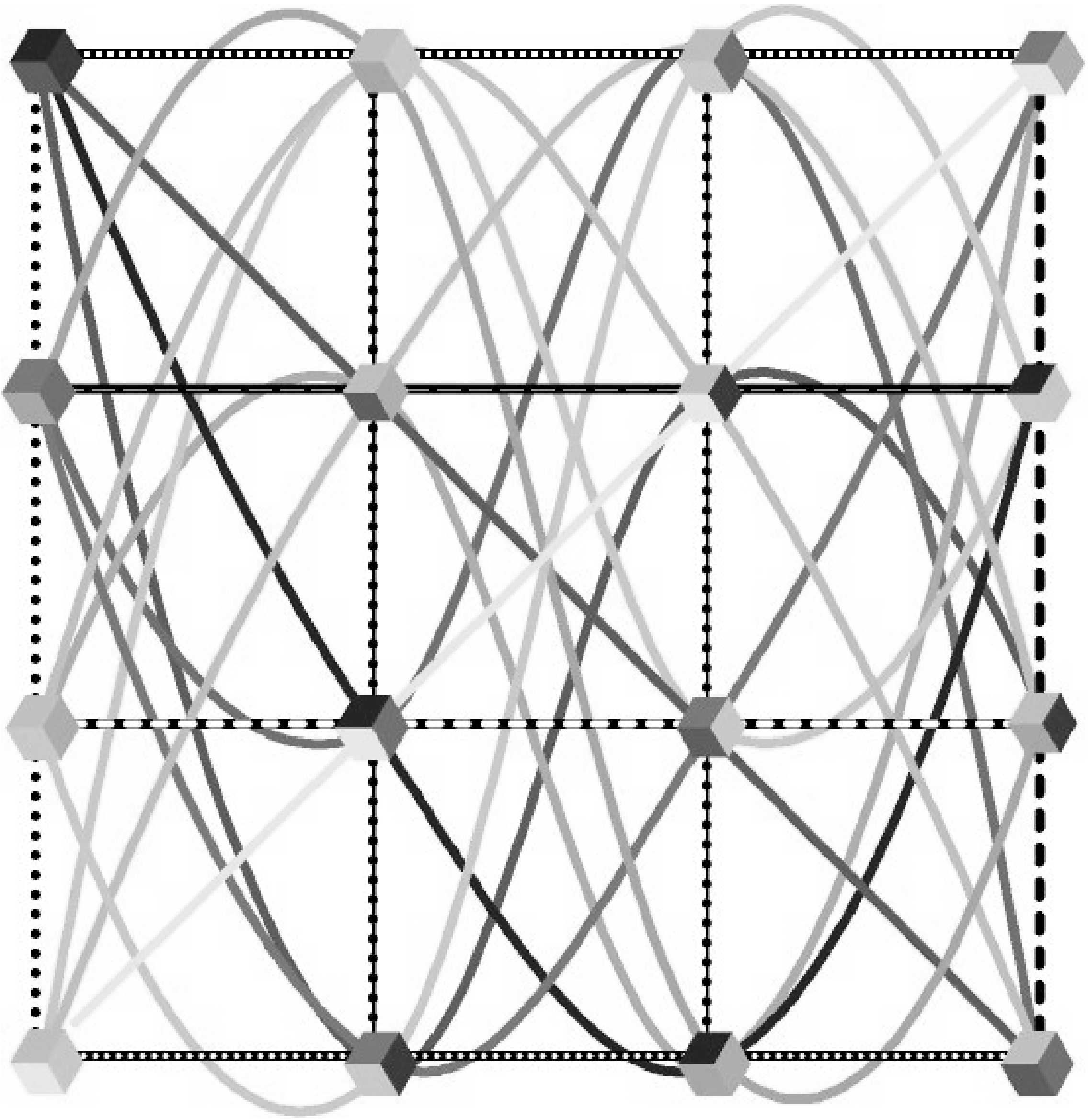
On peut remarquer que cette fois des droites ont été représentées par des arcs de courbe. Aurait-il pu en être autrement ? Non sous peine d'aligner tous les points. C'est une conséquence du théorème de Sylvester : soient n points du plan réel tels que toute droite qui joint deux points distincts en contient un troisième. Alors les n points sont tous alignés. On trouve une démonstration particulièrement élégante (10 lignes, et accessible en lycée) de ce théorème dans le livre publié en hommage à ERDÖS, intitulé "Proofs from the book" de Martin AIGNER et Günter M. ZIEGLER chez SPRINGER.

Si arrivés là les élèves tentent directement de trouver un plan affine d'ordre 4, ils vont avoir beaucoup de mal. D'ailleurs, en existe-t-il un ?

C'est la question que semble se poser Bertrand Denis, prof de philo au lycée Louise Michel lors du Congrès MATh.en.JEANS 2000. Il est en train d'essayer de matérialiser des droites à l'aide de fils de laines de couleurs différentes pour créer un plan affine d'ordre 4 sur un réseau de 4 fois 4 points.

Voici une réponse possible (voir page suivante) :

Les quatre droites horizontales et les quatre droites verticales forment respectivement deux faisceaux de droites parallèles qui se coupent en les seize points de notre plan. Chaque point se trouve en outre sur trois autres droites, ce qui a été matérialisé par trois couleurs disposées sur trois faces visibles d'un cube vu en perspective. On remarquera que la même couleur ne peut pas se trouver sur la même ligne horizontale ou colonne verticale, sinon deux droites passeraient par deux points distincts. D'autre part, et bien que cela n'apparaisse pas sur une version "papier" en noir et blanc, chacun des trois faisceaux de quatre droites parallèles restants a été originellement coloré dans la même teinte (jaune, vert ou bleu) avec des nuances pour différencier les quatre droites.



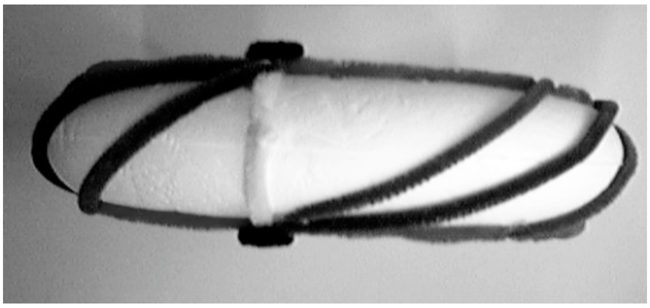
Cette représentation nous fait penser à un problème classique, celui du carré gréco-latin, sur lequel on reviendra plus tard.

L'idée de privilégier deux faisceaux de droites parallèles est d'autre part tout à fait féconde, car elle nous permet d'introduire très naturellement des coordonnées pour les points. La question qui se pose alors est la suivante : peut-on écrire l'équation de nos droites ?

Pour répondre à cette question, on est amené à introduire des opérations ayant les propriétés usuelles, mais telles que les résultats ne dépassent pas 2 (cas du plan affine d'ordre 3) ou 3 (cas du plan affine d'ordre 4). En d'autres termes, il faut travailler avec les corps finis d'ordre 3 et 4. A condition de bien poser les règles du jeu, le travail de recherche de ces corps est faisable avec des collégiens de quatrième (compter une bonne séance de deux heures pour que certains arrivent à la solution).

Dans le cas du corps d'ordre 3, on obtient une représentation géométrique particulièrement intéressante en utilisant un tore puisque les opérations se font simplement modulo 3, c'est à dire sur un cercle.

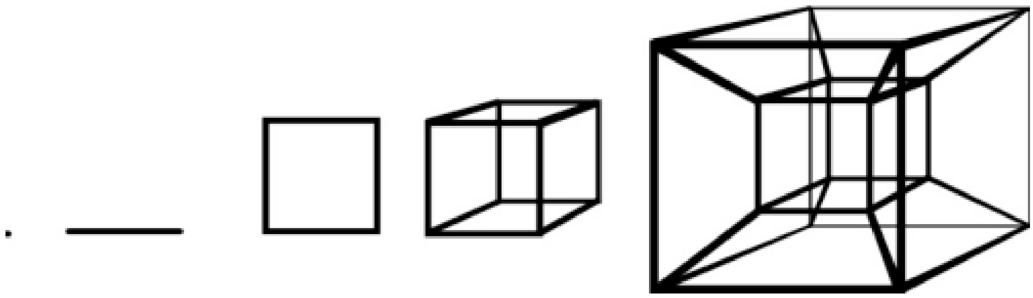
Voici donc une nouvelle représentation spatiale de l'espace affine d'ordre 3 :



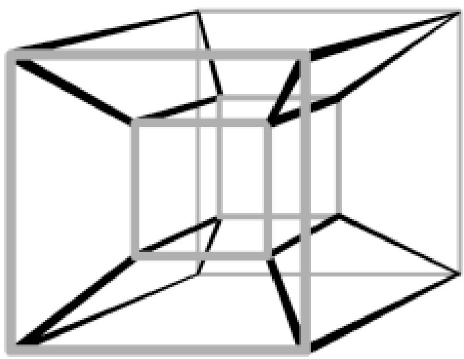
Le tore étant posé sur un plan horizontal, le maillage permettant d'établir les coordonnées des points est matérialisé par trois cercles horizontaux concentriques d'une part, et trois cercles "verticaux" d'autre part, dont les plans font entre eux des angles dièdres de 120° et se coupent le long de l'axe vertical du tore. Cela détermine 9 points, 3 par cercle. Par chacun de ces points passe un cercle vertical (grand cercle), un cercle horizontal (petit cercle), et deux courbes hélicoïdales qui se décalent d'un ou deux points selon le sens choisi sur les petits cercles lorsqu'elles passent de l'un à l'autre.

Cette représentation est assez élégante parce que Z/3Z a une structure particulièrement simple (3 est un nombre premier). Pour le corps d'ordre 4, comme 4 n'est pas premier mais est une puissance entière positive d'un nombre premier, le corps certes existe mais ne se trouve pas aussi facilement. On pourrait encore utiliser un tore. Mais nous avons préféré utiliser un squelette d'hypercube "vu en perspective". Pour une présentation très simple et accessible de ce qu'est un hypercube (je l'ai testé), je conseille le livre de Thomas BANCHOFF intitulé "La quatrième dimension", chez BELIN.

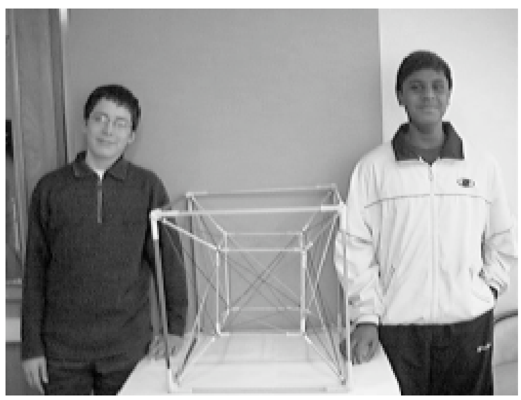
Le principe consiste à itérer le procédé de construction qui permet de passer d'un point à un segment en le déplaçant par translation dans une direction quelconque et en gardant la trace de son déplacement. On obtient ainsi un "cube de dimension 1" ; puis on passe au carré (cube de dimension 2) en déplaçant le segment obtenu par une translation de vecteur orthogonal à la direction précédente, et de même norme. Une translation dans une direction orthogonale aux deux précédentes donne le cube usuel, de dimension trois. Et pour obtenir l'hypercube il suffit de recommencer dans une direction orthogonale aux trois premières. Dans la figure ci-dessous, cette quatrième direction est vue en perspective, avec un point de fuite situé au centre du cube initial.

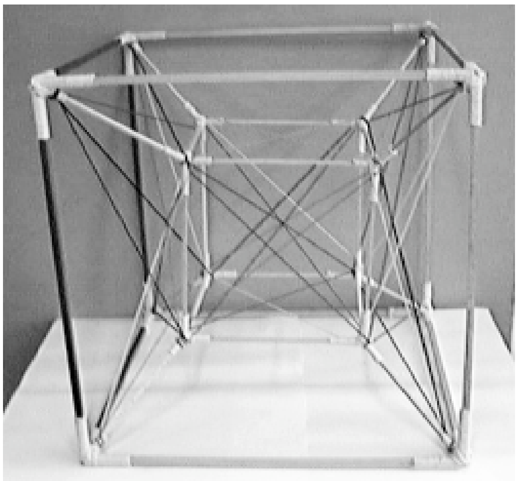


Sur la figure ci-dessous, on voit clairement les seize sommets de l'hypercube qui sont en même temps les seize points du plan affine d'ordre 4, et en gris et noir respectivement les huit droites d'équations respectives $x=0, \ldots, x=3$ et $y=0 \ldots y=3$. Elles sont représentées par des quadrilatères plans. Elles jouent exactement le même rôle que les cercles horizontaux et verticaux sur le tore.



Et voici maintenant nos artistes au travail et devant leur résultat :





Des fils de laine de trois teintes avec quatre nuances pour chaque teinte matérialisent les trois réseaux de quatre droites parallèles, non parallèles aux axes.

Comment ont-ils fait ?

Il était très difficile de trouver une représentation du plan affine de ce type par tâtonnement alors que cela restait possible sur une grille, avec un peu de patience. Les élèves ont donc écrit les équations des droites de diverses pentes dans le corps fini d'ordre 4 qu'ils avaient préalablement construit (du moins pour certains d'entre eux), puis il a fallu se repérer à l'aide des coordonnées.

Il est temps d'apporter quelques précisions, qui ont été (brièvement) développées durant le stage. Etant donné un plan affine fini, il n'y a pas forcément un corps sous-jacent. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel corps existe est que le théorème de Desargues soit vérifié. Dans ce cas, le corps étant fini est forcément commutatif et *donc* un autre théorème intéressant est vérifié, celui de Pappus. Ces questions sont exposées et démontrées dans l'ouvrage d'ARTIN, Algèbre géométrique, déjà cité.

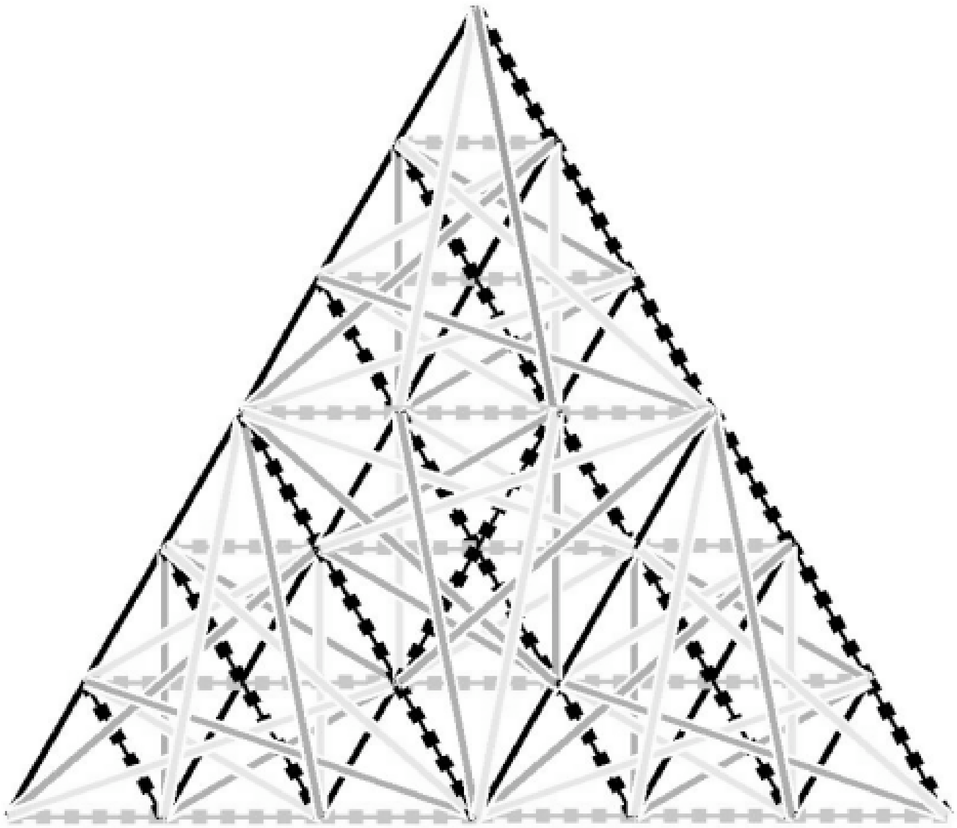
Etant donné p^n, où p est un nombre premier et n un entier positif, il existe un unique corps fini d'ordre p^n. On sait d'ailleurs le construire. Ceci nous garantit l'existence de plans affines d'ordres 3, 4, 5, 7 et 8. Ces derniers sont uniques à un isomorphisme près, et il n'en existe pas d'autres pour ces ordres. Par contre à partir de 9, il existe des plans affines "non classiques", c'est à dire sans corps sous-jacent. Je n'ai aucun renseignement sur ces plans, si ce n'est que le plan classique d'ordre 4 est déjà relativement compliqué !

Enfin, de nombreux géomètres pensent qu'il n'existe pas de plans affines pour d'autres ordres que les puissances entières de nombres premiers (pour 6 et 10 par exemple, et une infinité d'autres valeurs, l'inexistence est démontrée). Mais cela reste pour l'instant une conjecture..

Une autre représentation du plan affine d'ordre 4

Nous avons également construit une autre représentation du plan affine d'ordre 4. Cette fois nous utilisons un tétraèdre sur lequel nous plaçons 16 points de la façon suivante : les 4 sommets, plus douze points situés à chaque tiers de chacune des six arêtes. Les faisceaux de droites parallèles sont les suivants : trois faisceaux constitués chacun de deux arêtes opposées, et de deux rectangles parallèles à ces deux arêtes. Deux autres faisceaux constitués chacun de quatre "droites" constituées par un sommet et trois points de la face opposée situés aux tiers des arêtes, constituant l'un des deux triangles équilatéraux possibles.

Ci-dessous, un découpage permettant par pliage d'obtenir l'objet (il suffit de rabattre les trois pointes de façon à obtenir un tétraèdre régulier) : Durant l'année, nous l'avons réalisé avec du fil de fer enrobé de plastique et de la peinture pour maquette.

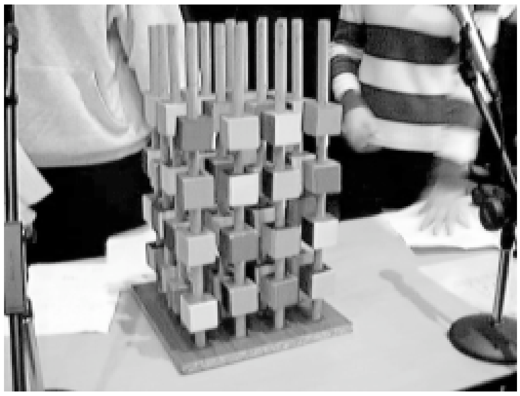


Le cube arabo-greco-latin

Une visite au Palais de la Découverte lors de laquelle nous avons assisté à un exposé de Jean BRETTE sur les carrés gréco-latins et le problème dit des "36 officiers" nous a donné l'idée de résoudre le problème suivant :

On a quatre teintes rouges, quatre teintes vertes et quatre teintes bleues. 64 cubes sont peints chacun de trois couleurs, une rouge, une verte, une bleue. Comment disposer ces cubes pour former un cube quatre fois plus grand, de telle façon qu'aucune suite de quatre cubes parallèle aux arêtes ne comporte deux fois la même couleur. Nous avons appelé ce cube arabo-gréco-latin, considérant qu'au lieu de trois sortes de couleurs, on peut utiliser trois types de signes : des chiffres arabes, des lettres grecques et l'alphabet latin.

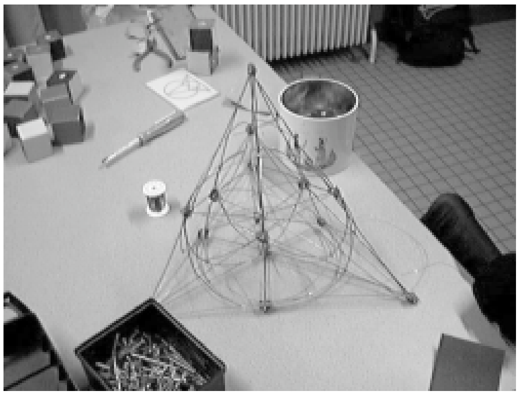
Voici quelques photos témoignant de la construction de notre cube. De façon à ce que le résultat soit visibles, les petits cubes sont espacés les uns des autres, fixés sur des tiges en bois.

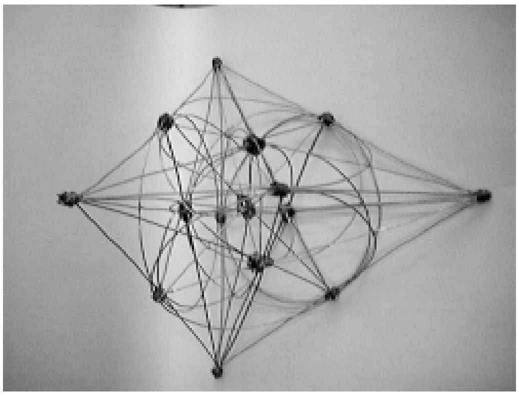


Ce problème se résout en se plaçant cette fois dans un espace affine d'ordre 4 dont les cubes sont les points. Chaque couleur correspond à un plan de 16 points et les trois directions des arêtes sont celles des axes, chaque point possédant trois coordonnées de valeurs 0, 1, 2, ou 3 dans le corps d'ordre 4.

Il y a, par exemple, quatre nuances de bleu, et ces dernières ne peuvent être sur un même cube, ce qui signifie que les 4 fois16 cubes de chacune de ces nuances forment quatre plans parallèles disjoints. Le problème revient à trouver trois directions de plans distinctes qui ne soient parallèles à aucun des axes. C'est un petit problème qui a été résolu par notre étudiante en DEUG sur la MJC (la solution n'est pas unique).

<u>Le plus petit espace projectif fini</u>





On trouve dans le livre de Burkard POLSTER une représentation très saisissante du plus petit espace projectif fini. L'axiomatique des plans projectifs est la suivante :

1. Deux points distincts appartiennent à exactement une droite.
2. Deux droites distinctes se coupent en exactement un point.
3. Il existe quatre points dont trois quelconques ne sont jamais alignés.

On passe très facilement d'un plan affine à un plan projectif et réciproquement en adjoignant ou au contraire retirant un point, appelé point à l'infini.

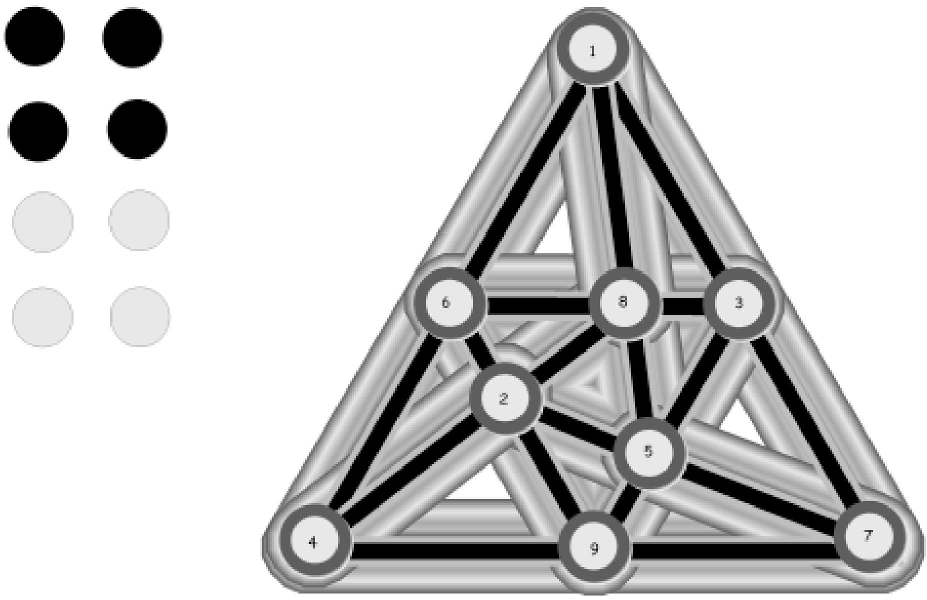
Le plus petit espace projectif fini sera quant à lui obtenu en partant du plus petit plan projectif, en ajoutant un point extérieur à ce plan et en exigeant que toute droite ait au moins trois points, que deux points déterminent une droite unique, et que toute droite qui intercepte deux côtés d'un triangle en des points distincts des sommets, coupe aussi le troisième côté.
La géométrie de l'espace projectif de dimension trois se différencie de celle de l'espace affine de dimension trois essentiellement par le fait que deux plans projectifs non confondus se coupent toujours selon une droite.

Configurations géométriques et jeu de morpion

Nous avons, lors de l'Université d'été, abordé les notions de configuration plane abstraite, et de configuration plane (les secondes se différentiant des premières par le fait que toutes les "droites" sont vraiment rectilignes. Les axiomes d'une configuration *pn* (abstraite ou non) sont les suivants :

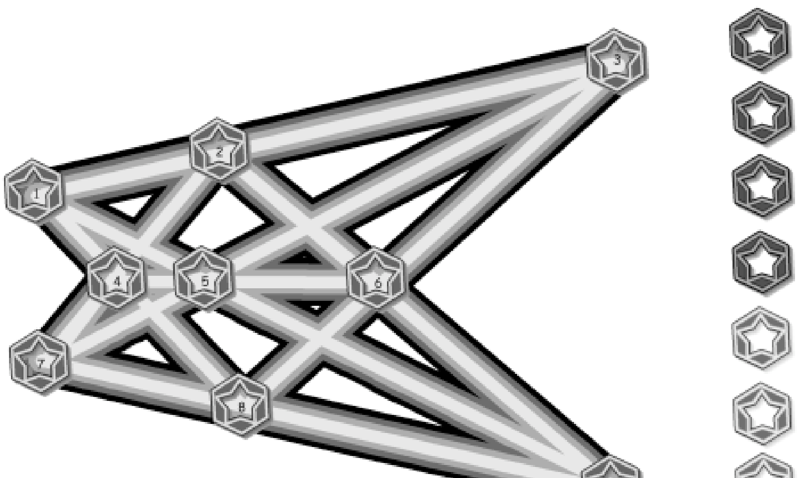
1. Par deux points distincts il passe au plus une droite
2. Deux droites distinctes se coupent en au plus un point
3. La géométrie est connexe
4. Il y a p droites, p points, et par chaque point il passe n droites, sur chaque droite il y a n points.

Nous avons étudié les configurations 93, ce qui est normal puisque Bobigny est dans le département 93 ! Ces configurations sont intéressantes parce qu'on peut démontrer qu'il n'y en a que de trois types, ce que nous avons vu au stage, mais pas avec les élèves, nous contentant d'étudier leurs propriétés géométriques de façon à ce qu'ils puissent les tracer. Le but était cette fois de réaliser un jeu de morpion avec chacune de ces configurations, et d'essayer ensuite de trouver des statégies gagnantes. Voci les jeux réalisés par les élèves, et en même temps les configurations :

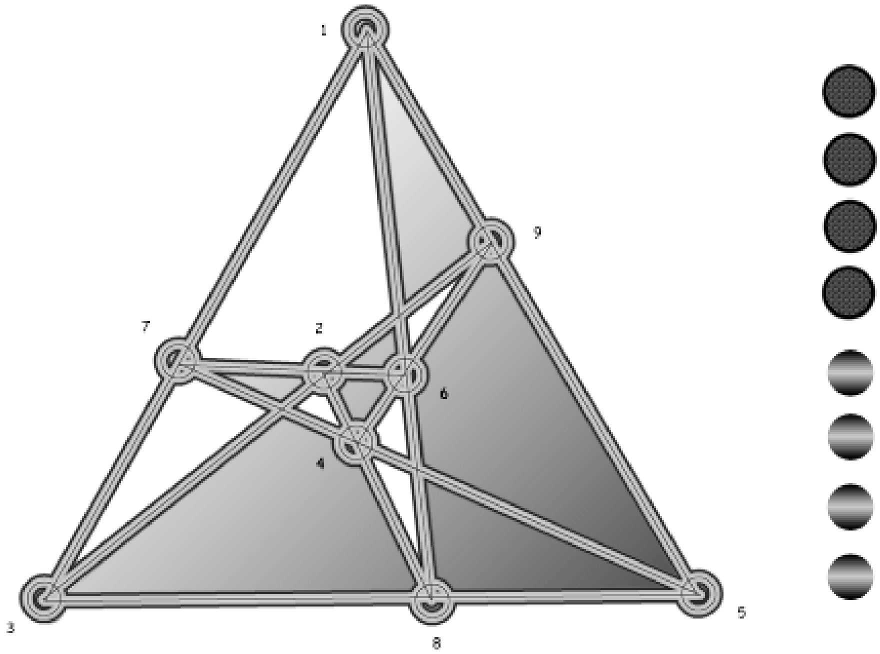


Si l'on veut respecter les symétries de cette configuration et l'alignement de points, les points numérotés 2, 5 et 8 doivent déterminer sur les côtés du triangle équilatéral central des longueurs dont le rapport est le nombre d'or.

La seconde configuration est la configuration de PAPPUS :



Enfin la troisième configuration fait apparaître elle aussi le nombre d'or dans la position des points 2, 4 et 6 sur les segment [6 ;7], [2;8] et [4;9].



La règle du jeu de morpion consiste à placer un pion à tour de rôle. Le premier qui en a aligné trois a gagné. Si les 8 pions sont placés, le joueur déplace l'un de ses pions sur une case libre voisine.

Nous avons déterminé une stratégie gagnante pour le premier joueur dans chacune des configurations, et organisé quelques confrontations. Cependant ces stratégies ne sont pas simples, et dificilement mémorisables. En fait d'ailleurs, les élèves ont cherché les stratégies mais n'ont pu mener la recherche jusqu'au bout.

Conclusion

L'objectif de ce qui précède est seulement d'évoquer l'étonnante richesse des représentations et des problèmes que l'on rencontre autour des géométries finies. Le livre de Burkard POLSTER comporte beaucoup plus d'autres choses passionnantes. En un an nous n'en avons utilisé que quelques pages ! Je pense qu'il y a là une mine à exploiter pour des activités très diverses.

Lors de l'Université d'été, les stagiaires ont été mis en situation de chercher un certain nombre de problèmes, et ils se sont vu présenter des éléments mathématiques sur les questions abordées ici, ainsi que des références. Pour mener une activité du type de celle qui est proposée ici, il faut cependant s'immerger un peu dans la matière, et chercher soi-même des idées, en ayant en vue ce qui est ou n'est pas accessible aux élèves. Les idées ne doivent d'ailleurs pas seulement porter sur la nature mathématique des problèmes à traiter, mais aussi sur les moyens à mettre en œuvre pour arriver à des réalisations intéressantes (logiciels de dessin, matériel de bricolage). Cela exige un certain investissement et une expérimentation personnelle.