Géométrie :

Nous allons étudier cette année des géométries très diverses, et essayer de les représenter.
Nous appellerons géométrie une structure vérifiant au minimum les propriétés suivantes :

- ***C'est un ensemble de points, non vide.***
- ***Une "droite" est une partie de cet ensemble qui contient au moins deux points.***
- ***Un point appartient au moins à deux droites.***

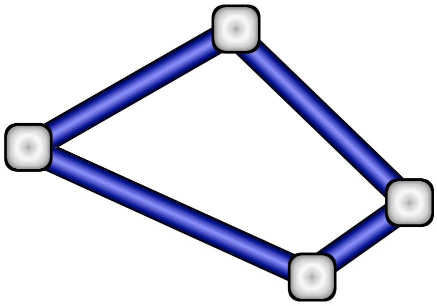
Définition :
Deux **droites** sont **parallèles** si elles coïncident ou si elles n'ont pas de point commun.
Deux **points** sont **parallèles** si ils coïncident ou si ils n'appartiennent pas à une même droite.

Nous allons travailler tout d'abord sur deux géométries très "classiques" : les plans projectifs et les plans affines. Les propriétés des droites et points des plans affines sont des propriétés de la géométrie étudiée depuis la sixième. Les plans projectifs sont un outil très commode pour étudier les plans affines, car ils présentent une simplicité qui leur est propre.

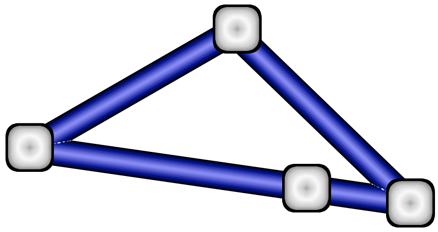
Pour chaque géométrie nous donnons la liste des propriétés qui la caractérisent, appelées "axiomes".

Plans projectifs

- ***Par deux points distincts, il passe exactement une droite.***
- ***Deux droites distinctes ont exactement un point commun.***
- ***Il existe quatre points tels qu'il n'y en a pas trois alignés parmi eux (autrement dit : un "vrai" quadrilatère)***



Un "vrai" quadrilatère…



et un "faux".

Plans affines

- ***Par deux points il passe exactement une droite***
- ***Par un point extérieur, il passe exactement une droite parallèle à une droite donnée***
- ***Il existe trois points non alignés (autrement dit, un "vrai triangle")***

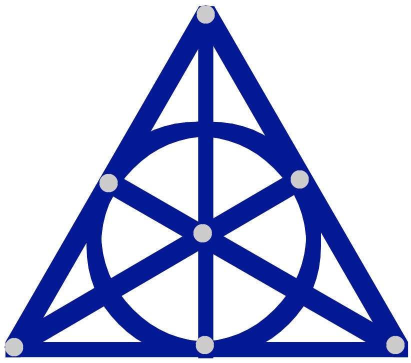
Nous nous intéresserons tout d'abord à ce qui se passe lorsque le nombre de points de la géométrie est fini.

Théorème :

Un plan projectif fini possède les propriétés suivantes :

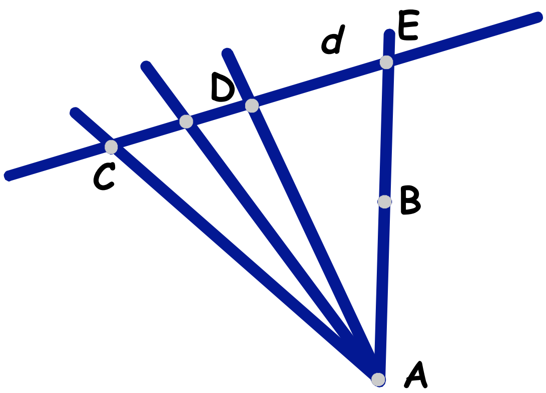
- ***Toutes les droites contiennent le même nombre de points ; si ce nombre est n+1, on parle du plan projectif d'ordre n***
- ***Tous les points sont contenus dans n+1 droites***
- ***Il y a en tout n^2+n+1 points et autant de droites.***

Exemple : le plan de FANO : c'est le plan projectif d'ordre **2**
Il y a $2^2+2+1 = 7$ points et aussi 7 droites. Chaque droite possède trois points et par chaque point il passe trois droites. Il est impossible de représenter cette figure dans un plan sans qu'une droite au moins soit courbe : essayez ! Ici, l'une des droites est donc représentée par un cercle.



Démonstration :

Tout d'abord, il y a un vrai quadrilatère ABCD. Les droites **(AB)** et **(CD)** se coupent en un cinquième point **E**, puisque toutes les droites distinctes se coupent. Nous appellerons ***d*** la droite passant par **C**, **D**, **E**.
Supposons que cette droite ***d*** contienne ***n+1*** points, avec ***n*** au moins égal à deux, à cause de **C**,**D**, et **E**. Le point **A** est extérieur à cette droite, et par ce point passent ***n+1*** droites distinctes, obtenues en en joignant **A** à chacun des points de ***d***. Cela s'appelle un faisceau de droites.



Tous les points du plan sont nécessairement sur l'une des droites de ce faisceau ; sinon, il y aurait une droite de plus passant par **A** car par deux points il passe exactement une droite, et elle couperait ***d*** en un point de plus puisque toutes les droites se coupent sauf si elles sont confondues . Or nous avons supposé que nous connaissions tous les points de ***d***.

Toute droite qui ne passe pas par **A** va couper chacune des droites du faisceau en exactement un point ; elle aura donc ***n+1*** points

Nous pouvons faire le même raisonnement pour **B**, car il nest pas sur ***d***. Par **B**, il passe aussi ***n+1*** droites, pour la même raison. Et donc toute droite qui ne passe pas par **B** possède encore ***n+1*** points.

Finalement, on peut dire de toutes les droites sauf **(AB)** qu'elles possèdent ***n+1*** points.

Mais **(AC)** contient ***n+1*** points. Comme ***n*** est au moins égal à 2, alors il y a un point de cette droite qui n'est pas sur ***d*** ni sur **(AB)** et comme toute droite qui ne passe pas par ce point comporte ***n+1*** points, c'est aussi le cas de **(AB)**.

Pour compter le nombre total de points, il suffit de considérer les ***n+1*** droites passant par exemple par **A** : elles comprennent chacune ***n*** points en plus de **A**, soit en tout :

$$n(n+1)+1 = n^2+n+1$$

Partant des ***n+1*** points de ***d***, nous comptons de même toutes les droites : **essayez de faire ce raisonnement.**

Passage aux plans affines :

A tout plan projectif d'ordre n on peut associer un espace affine "dérivé" en supprimant une droite et tous ses points.

- Toutes les droites comportent alors ***n*** points, puisqu'elles avaient un point sur la droite enlevée.
- Par deux points distincts, il passe toujours une seule droite : la même, moins un point.
- Par chaque point il continue à passer ***n+1*** droites : on a seulement enlevé un point à chacune d'elles, distinct de leur point commun.
- Il y a en tout n^2 points car on en a enlevé ***n+1*** , et n^2+n droites car on en a enlevé une.
- Par un point extérieur à une droite, il passe ***n*** sécantes obtenues en joignant le point extérieur à chacun des ***n*** points distincts de la droite, et une autre droite qui lui est forcément parallèle.

Réciproquement, étant donné un plan affine, nous pouvons définir abstraitement de nouveaux points correspondant aux ***faisceaux de droites parallèles***.
Un faisceau de droites parallèles est constitué en prenant toutes les droites parallèles à une même droite. Un tel faisceau peut être construit à partir de n'importe laquelle des droites qui le constituent. En effet deux droites parallèles à une même troisième son parallèles entre elles, sinon il passerait deux parallèle à cette dernière par leur point d'intersection.

Ces faisceaux sont donc tous disjoints ; de plus, ils comprennent au moins deux droites, car il y a toujours au moins un point extérieur à une droite sans quoi tous les points seraient alignés et il n'y aurait pas de vrai triangle ; et toute droite est dans exactement un tel faisceau. Nous disons de toutes les droites d'un même faisceau de parallèles qu'elles ont la même direction. Et par un point il passe exactement une droite de direction donnée.

Nous dirons que toutes les droites d'un faisceau ce coupent en un nouveau point, "à l'infini". Chaque droite a donc un point de plus. Nous posons en outre que l'ensemble des points à l'infini forme une nouvelle droite, appelée droite de l'infini.

L'ensemble obtenu en adjoignant ces points et cette droite vérifie les axiomes d'un plan projectif, dont le plan affine serait dérivé : en effet :

- Deux droites distinctes se coupent en un point : à l'infini si elles proviennent de droites parallèles ou si l'une des deux est la droite de l'infini ; et au même point qu'avant sinon.
- Par deux points distincts il passe exactement une droite : si les deux points sont des points anciens, il s'agit de l'ancienne droite passant par ces deux points, complétée de son point à l'infini. Si l'un des points est à l'infini, il existait une seule droite dans le plan affine passant par l'autre point et ayant la direction correspondante. Enfin, seule la droite de l'infini passe par deux points à l'infini.
- Prenons trois points non alignés du plan affine, **A,B,C** et considérons la droite parallèle à **(AB)** passant par **C**. Cette droite possède au moins un deuxième point, **D**, distinct des trois précédents, et les quatre points ainsi obtenus forment un vrai quadrilatère.

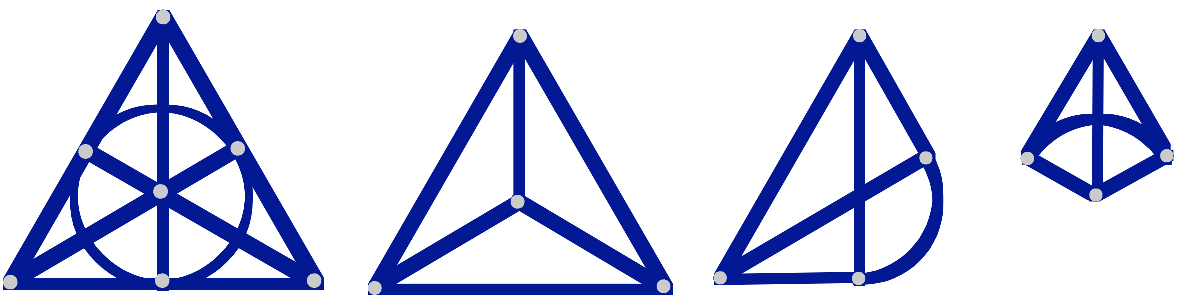
Naturellement, si on enlève la droite de l'infini et ses points, on retrouve le plan affine initial.

Donc tout plan affine peut être dérivé d'un plan projectif. On en déduit le théorème suivant, qui peut d'ailleurs être démontré directement :

Théorème :

Pour tout plan affine
- ***Toutes les droites comportent n points. On dit que le plan affine est d'ordre n***
- ***Par chaque point il passe n+1 droites***
- ***Il y a en tout n^2 points et n^2+n droites.***

Exemple : le plan affine d'ordre 2, dérivé du plan de Fano :



Plan de Fano et plans affines dérivés (en fait ils sont tous équivalents) : on peut les représenter à l'aide d'un tétraèdre dont les sommets représentent les points et les arêtes les droites.

Activités

- Dessiner les faisceaux de droites parallèles du plan affine d'ordre 2
- Dessiner un plan affine d'ordre 3. Pour cela, on essaiera tout d'abord de dessiner une figure du plan ou de l'espace comportant 9 points et présentant des particularités géométriques intéressantes (par exemple des symétries). Puis on essaiera sur cette base de tracer des droites (4 droites par points, 3 points par droite) telles que tous les axiomes soient vérifiés (les droites peuvent être courbes). On peut tracer les figures dans le plan ou dans l'espace.
- Dans chacun des cas précédents, dessiner les faisceaux de droites parallèles.
- Essayer de dessiner un plan affine d'ordre 3 avec le moins de droites courbes possible ; ou qui soit aussi symétrique que possible.
- Essayer de représenter le plan de Fano d'autres façons. Peut-on représenter le plan de Fano de telle façon que toutes les droites soient superposables par déplacement ?
- Essayer de représenter le plan projectif d'ordre 3 : on pourra compléter le plan affine d'ordre 3 à l'aide d'une droite à l'infini, ou partir d'une figure intéressante (par exemple très symétrique) de 13 points.
- Que pensez vous de l'affirmation suivante pour des points du plan usuel : Si n points sont tels que toute droite qui en contient deux en contient toujours un troisième, alors les n points sont tous alignés. (Cela expliquerait pourquoi on ne peut pas dessiner le plan de Fano avec des vraies droites, toutes distinctes).

Motif

- C'est une géométrie qui comporte p points
- Chaque droite comporte k points
- Etant donnés t points distincts, il passe exactement l droites par ces points
- C'est alors un motif de type $t\text{-}(p,k,l)$

Configuration

- Il y a p points et l droites
- Par chaque point passent n droites
- Sur chaque droite, il y a m points
- Deux points distincts sont contenus dans **au plus une** droite
- Deux droites distinctes se coupent en **au plus un point**
- La géométrie est connexe (deux points quelconques sont reliés)
- C'est alors une configuration abstraite plane de type (p_n, l_m)

Si elle peut être représentée dans le plan euclidien (usuel) avec de vrais segments de droite, on omet le mot "abstraite"
Si $p=l$ *et* $n=m$, on parle de type (p_n).

- Un plan affine est une configuration abstraite plane de type $(n^2{}_{n+1}, n^2+1_n)$ et un motif du type $2\text{-}(n^2,n,1)$
- Un plan projectif est une configuration abstraite plane du type (n^2+n+1_{n+1}) et un motif du type $2\text{-}(n^2+n+1,n+1,1)$.